गणित

कक्षा 6 के लिए पाठ्यपुस्तक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण

मार्च 2006 चैत्र 1928

PD 200T RA

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलूर 560 085

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन विभाग	:	*पी.राजाकुमार*
मुख्य उत्पादन अधिकारी	:	*शिव कुमार*
मुख्य संपादक	:	*श्वेता उप्पल*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*गौतम गांगुली*
सहायक संपादक	:	*रेखा अग्रवाल*
उत्पादन सहायक	:	*सुबोध श्रीवास्तव*

चित्रांकन
अनघा ईनामदार

आवरण
श्वेता राव

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा नारायन प्रिंटर्स और बाइन्डर डी-6, सेक्टर 63, नोएडा 201 301 द्वारा मुद्रित।

गणित

कक्षा 6 के लिए पाठ्यपुस्तक

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित सलाहकार समिति

जयंत विष्णु नारलीकर, *प्रोफ़ेसर,* इंटर युनिवर्सिटी सेंटर फॉर ॲसूट्रॉनॉमि एंड ॲसूट्रोफिजिक्स, (IUCCA), गणेशखिंड, पुणे युनिवर्सिटी, पुणे

मुख्य सलाहकार

एच.के. दीवान, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर (राजस्थान)

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

सदस्य

अवंतिका दाम, *टी.जी.टी.,* सी.आई.ई. एक्सपेरिमेंटल बेसिक स्कूल, शिक्षा विभाग, दिल्ली

अंजली गुप्ते, *अध्यापिका,* विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)

आर. आत्मारामन, *गणित शिक्षा सलाहकार,* टी.आई. मैट्रिक हायर सेकेंडरी स्कूल और ए.एम.टी.आई., चेन्नई (तमिलनाडू)

आशुतोष के. वझलवार, *प्रवाचक, (समन्वयक अंग्रेजी संस्करण),* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

एच. सी. प्रधान, *प्रोफ़ेसर,* होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, टी.आई.एफ.आर., मुंबई (महाराष्ट्र)

एस. पट्टनायक, *प्रोफ़ेसर,* इंस्टीट्यूट ऑफ़ मैथेमैटिक्स एंड एप्लिकेशन, भुवनेश्वर (उड़ीसा)

उदय सिंह, *प्रवक्ता,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

जबाश्री घोष, *टी.जी.टी.,* डी.एम. स्कूल, आर.आई.ई., एन.सी.ई.आर.टी, भुवनेश्वर (उड़ीसा)

प्रवीण कुमार चौरसिया, *प्रवक्ता (समन्वयक अंग्रेजी संस्करण),* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

धरम प्रकाश, *प्रवाचक,* सी.आई.ई.टी., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) अवकाश प्राप्त, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

मीना श्रीमाली, *अध्यापिका,* विद्या भवन सीनियर सेकेंडरी स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)

यू. बी. तिवारी, *प्रोफ़ेसर*, गणित विभाग, आई.आई.टी., कानपुर (उत्तर प्रदेश)

श्रद्धा अग्रवाल, *टी.जी.टी.*, पदमपत सिंघानिया शिक्षा केंद्र, कानपुर (उत्तर प्रदेश)

श्रीजाता दास, *प्रवक्ता*, एस.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

सुरेश कुमार सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

हर्षा जे. पटादिया, *प्रवाचक*, सेंटर ऑफ एडव्हांस स्टडीज इन एजुकेशन, एम. एस. विश्वविद्यालय बड़ौदा, वडोदरा (गुजरात)

हिंदी अनुवादक

के.के. गुप्ता, *प्रवाचक*, यू.एन.पी.जी. कॉलेज, पडरौना (उत्तर प्रदेश)

महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) अवकाश प्राप्त, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

राजकुमार धवन, गीता सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं. 2, सुल्तानपुरी, दिल्ली

रीतू तिवारी, राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, सूरजमल विहार, दिल्ली

सदस्य-समन्वयक

सुरेश कुमार सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर*, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी, नई दिल्ली

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नई राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन करते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक जिंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फ़ेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए पाठ्यक्रम निर्माताओं ने विभिन्न चरणों में ज्ञान का पुनर्निर्धारण करते समय बच्चों के मनोविज्ञान एवं अध्यापन के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक विकास समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार डॉ. हृदय कांत दीवान की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और
प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
20 दिसम्बर 2005

शिक्षकों के लिए शब्द

गणित का हमारे जीवन में बहुत महत्व है। यह हमें न केवल दिन-प्रतिदिन की परिस्थितियों में मदद करती है, बल्कि तर्कपूर्ण विवेचन, निरपेक्ष सोच एवं कल्पनाशीलता विकसित करने में सहायक होती है। यह जीवन को समृद्ध एवं सोच-विचार की नई दिशाएँ उपलब्ध कराती है। गूढ़ सिद्धांतों के सीखने का संघर्ष तर्कों को समझने एवं गढ़ने की ताकत पैदा करता है, और संकल्पनाओं के बीच परस्पर संबंधों को समझने की सक्षमता पैदा करता है। हमारी समृद्ध समझ अन्य विषयों के दुर्बोध विचारों से भी निपटने में सहायता करती है। इसके साथ ही यह हमें प्रतिमानों, मानचित्रों, क्षेत्र मूल्यांकन तथा आयतन को समझने में बेहतर बनाती है और आकृति एवं आकार के बीच समानताओं को जानने योग्य बनाती है। गणित के प्रयोजन परिदृश्य में हमारे जीवन के विविध पहलू एवं पर्यावरण सम्मिलित हैं। इस संबंध को सभी संभावित क्षेत्रों में उजागर करने की आवश्यकता है।

गणित सीखने का तात्पर्य केवल हलों एवं कायदों का रटना नहीं है, बल्कि यह जानना है कि प्रश्न को हल कैसे करना है। हम आशा करते हैं कि आप एक शिक्षक के नाते अपने छात्रों को स्वयं ही प्रश्नों को गढ़ने एवं पैदा करने के तमाम अवसर प्रदान करेंगे। हमें विश्वास है कि यह एक अच्छा विचार साबित होगा कि बच्चों से अनेकानेक प्रश्नों को गढ़ने के लिए कहा जाए, जितना कि वे कर सकें। यह प्रक्रिया बच्चों में गणित के सिद्धांतों एवं संभावनाओं को विकसित करने में सहायक होगी। जैसे-जैसे वे खुद निपटाने वाली समस्याओं के प्रति आत्मविश्वस्त होते जाएंगे, वैसे-वैसे वे अधिक विविधतापूर्ण एवं अधिक जटिल प्रकृति की समस्याएं गठित करने लगेंगे।

कक्षा में पढ़ाई जाने वाली गणित सजीव एवं आकर्षक होनी चाहिए जो कि बच्चों को अपनी समझ की संकल्पनाओं को सुस्पष्ट करने वाला, मॉडलों (प्रतिमानों) को तैयार करने वाला तथा परिभाषाओं को विकसित करने वाला बनाए। भाषा एवं गणित अधिगम के बीच बहुत गहन संबंध है और यहाँ पर बच्चों को गणित के विचारों के बारे में बात करने के ढेरों अवसर होने चाहिए और कक्षा के अंतर्गत की जाने वाली किसी भी परिचर्चा के साथ उनके अनुभवों को संयोजित किया जाना चाहिए।

उन्हें अपनी ही भाषा एवं शब्दों में उपयोग में निश्चय ही कोई अवरोध नहीं होना चाहिए और औपचारिक भाषा की ओर स्थापन धीरे-धीरे होना चाहिए। वहाँ पर बच्चों को आपस में ही चर्चा करने की जगह/अवधि होनी चाहिए तथा उन्होंने पाठ्यपुस्तक से क्या समझा है इस

बारे में प्रस्तुत करने तथा उस संदर्भ के बारे में अपने अनुभवों के उदाहरण पेश करने का अवसर मिलना चाहिए। उन्हें समूह में पुस्तक पढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए तथा उससे उन्होंने क्या समझा उसे गढ़ने एवं व्यक्त करने के लिए भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

गणित को कल्पनाशीलता की आवश्यकता होती है। यह एक विशेष विद्या है। जिसमें एक शिक्षार्थी परिणाम निकालना, सूत्रबद्ध करना तथा तर्क पर आधारित कथन को प्रमाणित करना सीखता है। सारांश में पढ़ने हेतु बच्चों को ठोस सामग्री, अनुभवों तथा पाड़ के रूप में मदद के लिए ज्ञात संदर्भों की ज़रूरत होगी। कृपया उन्हें ये चीजें उपलब्ध कराएं लेकिन ये भी सुनिश्चित करें कि वे उन पर निर्भर न होकर रह जाएं। हमें यह स्पष्ट करना पड़ सकता है कि यह पुस्तक साक्ष्य एवं साक्ष्यांकन के बीच अंतर पर जोर देती है। ये दोनों विचार प्रायः भ्रामक होते हैं और हम यह आशा करते हैं कि साक्ष्य के साथ साक्ष्यांकन को समिश्रित करने से बचाव की सावधानी बरतेंगे।

इस पुस्तक में बहुत सारी ऐसी स्थितियाँ उपलब्ध कराई गई हैं, जहाँ बच्चे सिद्धांत या प्रतिमान को साक्ष्यांकित करेंगे और इनमें से अपवादों का पता करने की कोशिश भी करेंगे। इसलिए, जहाँ एक तरफ बच्चों से यह उम्मीद की जाती है कि प्रतिमान का अवलोकन करेंगे एवं सामान्यीकरण (सूत्रबद्धता) करेंगे वहीं दूसरी ओर यह आशा की जाती है कि सूत्रबद्धता में अपवादों का पता करें और नई परिस्थितियों में प्रतिमानों को व्याप्त करें तथा उनकी वैधता को जाँचें। गणित के विचारों को सीखने का यह भी एक अनिवार्य अंग है, इसलिए यदि आप कोई ऐसी जगह पाते हैं जहां छात्रों के हेतु ऐसे अभ्यासों को बनाया जा सकता हो तो यह उपयोगितापूर्ण होगा। उन्हें निश्चित रूप से ऐसे अनेक सुअवसर दिए जाने चाहिए जहाँ वे स्वयं समस्याओं को सुलझाएं और प्राप्त किए गए समाधान को प्रदर्शित करें। यह आशा की जाती है कि आप बच्चों को ऐसे सुअवसर देंगे जहाँ वे विभिन्न विचारों के लिए तर्कपूर्ण दलील दे सकें और उनसे यह अपेक्षा करें कि वे तर्कसंगत दलील का अनुपालन करें तथा प्रस्तुत की दलील में कमियों को खोज सकें। यह उनके लिए बहुत ही अनिवार्य है ताकि उनके अन्दर कुछ प्रमाणित करने की समझ की क्षमता पैदा हो तथा निहित संकल्पना के बारे में आत्मविश्वासी बन सकें।

यहाँ पर यह अपेक्षा की जाती है कि आपकी गणित की कक्षा एक गवेषणापूर्ण एवं क्रियात्मक विषय के रूप में उभरेगी न कि सिर्फ पुराने एवं जटिल प्रश्नों को पुराने उत्तरों को ढूँढने का अभ्यास मात्र। गणित की कक्षा को आँख मींचकर कलनविधि को समझने के अनुप्रयोग के रूप में अपेक्षित नहीं किया जाना चाहिए, बल्कि बच्चों का समस्याओं के हल करने के लिए विभिन्न उपायों को खोजने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। उन्हें यह अवबोध करने की जरूरत है कि यहाँ पर गणना या परिकलन के अनेकों विकल्प हैं तथा

पुस्तक के अंतिम स्वरूप के लिए आयोजित कार्यशाला के निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के बारे में परिषद आभार व्यक्त करती है। दीपक मंत्री, विद्या भवन बेसिक स्कूल, उदयपुर, राजस्थान; शगुफ्ता अंजुम, विद्या भवन सीनियर सेकेंडरी स्कूल, उदयपुर, राजस्थान; रंजना शर्मा, विद्या भवन सेकेंडरी स्कूल, उदयपुर, राजस्थान। परिषद् एस.सी.ई.आर.टी., छत्तीसगढ़, रायपुर के श्री उत्पल चक्रवर्ती द्वारा दिए गए सुझावों के प्रति उनका आभार व्यक्त करती है।

परिषद् पाठ्य-पुस्तक समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों की बहुमूल्य भागीदारी के लिए हार्दिक आभार व्यक्त करती है। के. बालाजी, *टी.जी.टी.*, केंद्रीय विद्यालय, दोनी मलाई, कर्नाटक; शिव कुमार निमेश, *टी.जी.टी.*, राजकीय सर्वोदय बाल विद्यालय, दिल्ली; अजय सिंह, *टी.जी.टी.*, रामजस सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं. 3, दिल्ली; शुची गोयल, *पी.जी.टी.*, एयर फोर्स स्कूल, दिल्ली; मंजीत सिंह, *टी.जी.टी.*, गर्वनमेंट हाई स्कूल, गुड़गाँव, हरियाणा; डॉ. प्रताप सिंह रावत, *प्रवक्ता*, एस.सी.ई.आर.टी., गुड़गाँव।

उदयपुर में आयोजित पाठ्यपुस्तक विकास समिति की तीसरी कार्यशाला में सुविधा एवं संसाधन प्रदान करने हेतु परिषद् विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर और उसके संकाय सदस्यों की आभारी है। पुस्तकालय सहायता के लिए निदेशक सेंटर फॉर सांइस एजुकेशन एंड कम्युनिकेशन (C–SEC) दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रति भी परिषद आभार ज्ञापित करती है।

परिषद् एन.सी.ई.आर.टी. में हिंदी रूपातंरण के पुनरावलोकन हेतु आयोजित कार्यशाला में निम्न भागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है : अजय कुमार सिंह, रामजस सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं. 3, चांदनी चौक, दिल्ली; बी.एम. गुप्ता, डायरेक्टरेट ऑफ एजुकेशन, दिल्ली (अवकाश प्राप्त)।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद प्रोफ़ेसर एम. चन्द्रा, विभाग प्रमुख, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी. की आभारी है। इसके अतिरिक्त परिषद् विजय कुमार, *डी.टी.पी. ऑपरेटर;* दिग्विजय सिंह अत्री एवं एल.आर. भारती, *कॉपी एडिटर,* एन.सी.ई.आर.टी.; दीपक कपूर, *कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी.; ए.पी.सी ऑफिस, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. प्रशासन और प्रकाशन विभाग के सहयोग हेतु हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

भारत का संविधान

उद्देशिका

हम, भारत के लोग, भारत को एक **संपूर्ण प्रभुत्व-संपन्न**, **समाजवादी**, **पंथ-निरपेक्ष**, **लोकतंत्रात्मक गणराज्य** बनाने के लिए तथा उसके समस्त नागरिकों को:

सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक **न्याय**,

विचार, अभिव्यक्ति, विश्वास, धर्म
और उपासना की **स्वतंत्रता**,

प्रतिष्ठा और अवसर की **समता**
प्राप्त कराने के लिए,

तथा उन **सब में** व्यक्ति की गरिमा और
राष्ट्र की एकता और अखंडता
सुनिश्चित करने वाली बंधुता बढ़ाने के लिए

दृढ़संकल्प होकर **अपनी इस संविधान सभा में** आज तारीख 26 नवंबर, 1949 ई. (मिति मार्गशीर्ष शुक्ला सप्तमी, संवत् दो हज़ार छह विक्रमी) को **एतद्द्वारा इस संविधान को अंगीकृत, अधिनियमित और आत्मार्पित करते हैं।**

विषय सूची

आमुख		iii
पाठ्यपुस्तक विकास समिति		v
आभार		vii
शिक्षक के लिए शब्द		ix
अध्याय 1	अपनी संख्याओं की जानकारी	1
अध्याय 2	पूर्ण संख्याएँ	39
अध्याय 3	संख्याओं के साथ खेलना	64
अध्याय 4	आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएं	99
अध्याय 5	प्रारंभिक आकारों को समझना	125
अध्याय 6	पूर्णांक	165
अध्याय 7	भिन्न	193
अध्याय 8	दशमलव	236
अध्याय 9	आँकड़ों का प्रबंधन	263
अध्याय 10	क्षेत्रमिति	298
अध्याय 11	बीजगणित	324
अध्याय 12	अनुपात और समानुपात	362
अध्याय 13	सममिति	386
अध्याय 14	प्रायोगिक ज्यामिति	402
	उत्तरमाला	429
	दिमागी–कसरत	464

भाग-3 (अनुच्छेद 12-35)

(अनिवार्य शर्तों, कुछ अपवादों और युक्तियुक्त निर्बंधन के अधीन)

द्‌वारा प्रदत्त

मूल अधिकार

समता का अधिकार

- विधि के समक्ष एवं विधियों के समान संरक्षण;
- धर्म, मूलवंश, जाति, लिंग या जन्मस्थान के आधार पर;
- लोक नियोजन के विषय में;
- अस्पृश्यता और उपाधियों का अंत।

स्वातंत्र्य-अधिकार

- अभिव्यक्ति, सम्मेलन, संघ, संचरण, निवास और वृत्ति का स्वातंत्र्य;
- अपराधों के लिए दोष सिद्‌धि के संबंध में संरक्षण;
- प्राण और दैहिक स्वतंत्रता का संरक्षण;
- छ: से चौदह वर्ष की आयु के बच्चों को नि:शुल्क एवं अनिवार्य शिक्षा;
- कुछ दशाओं में गिरफ्तारी और निरोध से संरक्षण।

शोषण के विरुद्‌ध अधिकार

- मानव के दुर्व्यापार और बलात श्रम का प्रतिषेध;
- परिसंकटमय कार्यों में बालकों के नियोजन का प्रतिषेध।

धर्म की स्वतंत्रता का अधिकार

- अंत:करण की और धर्म के अबाध रूप से मानने, आचरण और प्रचार की स्वतंत्रता;
- धार्मिक कार्यों के प्रबंध की स्वतंत्रता;
- किसी विशिष्ट धर्म की अभिवृद्‌धि के लिए करों के संदाय के संबंध में स्वतंत्रता;
- राज्य निधि से पूर्णत: पोषित शिक्षा संस्थाओं में धार्मिक शिक्षा या धार्मिक उपासना में उपस्थित होने के संबंध में स्वतंत्रता।

संस्कृति और शिक्षा संबंधी अधिकार

- अल्पसंख्यक-वर्गों को अपनी भाषा, लिपि या संस्कृति विषयक हितों का संरक्षण;
- अल्पसंख्यक-वर्गों द्‌वारा अपनी शिक्षा संस्थाओं का स्थापन और प्रशासन।

सांविधानिक उपचारों का अधिकार

- उच्चतम न्यायालय एवं उच्च न्यायालय के निर्देश या आदेश या रिट द्‌वारा प्रदत्त अधिकारों को प्रवर्तित कराने का उपचार।

समस्या को हल करने के लिए अनेकों रणनीतियाँ अपनाई जा सकती हैं। आप कुछ ऐसी समस्याएँ शामिल कर सकते हैं जिन्हें सही हल करने के लिए कई तरह के अवसर हों जो उन्हें गणित के तात्पर्य के बेहतर अवबोध में सहायक होंगे।

हमने यहाँ पर सभी अध्यायों को एक-दूसरे से जोड़ने का प्रयास किया है तथा पूर्ववर्ती अध्यायों में सीखी गई अवधारणाओं को परवर्ती अध्यायों के विचारों की शुरूआत के लिए प्रयुक्त किया है। हम आशा करते हैं कि आप इसे एक सुअवसर के रूप में प्रयुक्त करेंगे और इन अवधारणाओं को एक उत्तरोत्तर वृद्धि के रूप में संशोधित करेंगे ताकि बच्चों को गणित की समूची संकलनात्मक संरचना अवबोध करने में सहायता मिले। कृपया आप ऋणात्मक संख्याओं, भिन्नों, चरों तथा अन्य विचारों जो बच्चों के लिए नवीन हों, उन पर अधिक समय व ध्यान दें। इनमें से बहुत सारे गणित को आगे चलकर सीखने के लिए आधार हैं।

हम आशा करते हैं यह पुस्तक सुनिश्चित करेगी कि बच्चे गणित को पढ़ते हुए मनोविनोद को महसूस करेंगे तथा प्रतिमानों की सूत्रबद्धता एवं समस्याओं को गवेषित करेंगे जोकि वे स्वयं ही करने में आनंद पाएंगे। वे आत्मविश्वास से सीखेंगे न कि गणित के प्रति डर महसूस करेंगे तथा आपसी परिचर्चा के साथ एक दूसरे की मदद करेंगे। इसके साथ ही, हम यह आशा करते हैं कि आप उन्हें ध्यानपूर्वक सुनने का समय निकालेंगे और उन विचारों को पहचानेंगे जिन्हें बच्चों के साथ ज़ोर देने की ज़रूरत है। इसके साथ ही बच्चों के अपने विचारों को सुस्पष्ट करने तथा उनकी सोच को शाब्दिक अभिव्यक्ति या क्रियारूपांतरण का अवसर उपलब्ध कराएँगे। हमें, इस पुस्तक के बारे में आपके विचारों एवं सुझावों का स्वागत है और हमें आशा है कि आप हमें उन रोचक अभ्यासों को भेजेंगे जोकि आपने उन्हें पढ़ाने के दौरान विकसित किए होंगे ताकि उन्हें पुस्तक के अगले संस्करण में सम्मिलित किया जा सके।

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

अध्याय 1

अपनी संख्याओं की जानकारी

1.1 भूमिका

वस्तुओं को गिनना अब हमारे लिए सरल है। अब हम वस्तुओं को बड़ी संख्याओं में गिन सकते हैं, जैसे कि एक स्कूल के विद्यार्थियों की संख्या, और इन संख्याओं को संख्यांकों (numerals) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। हम उपयुक्त संख्या नामों (number names) का प्रयोग करके बड़ी संख्याओं से संबंधित सूचनाएँ भी दे सकते हैं।

ऐसा नहीं है कि हम हमेशा से ही बड़ी राशियों के बारे में वार्तालाप या संकेतों द्वारा सूचना देना जानते थे। कई हज़ार वर्ष पहले, लोग केवल छोटी संख्याओं के बारे में ही जानते थे। धीरे-धीरे उन्होंने बड़ी संख्याओं के साथ कार्य करना सीखा। उन्होंने बड़ी संख्याओं को संकेतों से व्यक्त करना भी सीखा। यह सब मानव प्राणियों के सामूहिक प्रयासों के कारण संभव हो सका। उनका रास्ता सरल नहीं था और उन्हें इस पूरे रास्ते में संघर्ष करना पड़ा। वास्तव में, संपूर्ण गणित के विकास को इसी रूप में समझा जा सकता है। जैसे-जैसे मानव ने उन्नति की, वैसे-वैसे गणित के विकास की आवश्यकता बढ़ती गई और इसके परिणामस्वरूप गणित में विकास और तेज़ी से हुआ।

हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं और उनके बारे में अनेक बातें जानते हैं। संख्याएँ प्रत्यक्ष वस्तुओं को गिनने में हमारी सहायता करती हैं। संख्याएँ हमारी सहायता यह बताने में करती हैं कि वस्तुओं का कौन-सा संग्रह (collection) बड़ा है और वस्तुओं को पहले, दूसरे इत्यादि क्रम में व्यवस्थित करने में भी सहायता करती हैं। संख्याओं का विभिन्न संदर्भों में और अनेक प्रकारों से प्रयोग किया जाता है। बिभिन्न स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं। भिन्न पाँच स्थितियों को लिखिए जिनमें हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं।

हम संख्याओं के साथ कार्य करने का आनंद प्राप्त कर चुके हैं। हम इनके साथ योग, व्यवकलन (घटाने), गुणा और भाग की संक्रियाएँ भी कर चुके हैं।

हम संख्या अनुक्रमों (sequences) में प्रतिरूपों (patterns) को देख चुके हैं और संख्याओं के साथ अनेक रूचिपूर्ण बातें कर चुके हैं। इस अध्याय में, हम कुछ समीक्षा और पुनरावलोकन के साथ इन रूचिपूर्ण बातों पर और आगे कदम बढ़ाएँगे।

संख्याओं की तुलना

चूँकि हम संख्याओं की तुलना पहले भी बहुत कर चुके हैं, आइए देखें कि क्या हमें याद है कि दी गई संख्याओं में कौन सी संख्या सबसे बड़ी है?

(i) 92, 392, 4456, 89742 **मैं सबसे बड़ी हूँ**

(ii) 1902, 1920, 9201, 9021, 9210 **मैं सबसे बड़ी हूँ**

तो, हम यहाँ उत्तर जानते हैं।

अपने मित्रों में चर्चा कीजिए और पता कीजिए कि किसी संख्या समूह में वे सबसे बड़ी संख्या किस प्रकार ज्ञात करते हैं।

प्रयास कीजिए

क्या आप तुरंत ज्ञात कर सकते हैं कि प्रत्येक पंक्ति में कौन सी संख्या सबसे बड़ी है और कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

1. 382, 4972, 18, 59785, 750 उत्तर : 59785 सबसे बड़ी है और 18 सबसे छोटी है।
2. 1473, 89423, 100, 5000, 310 उत्तर : ....
3. 1834, 75284, 111, 2333, 450 उत्तर : ....
4. 2853, 7691, 9999, 12002, 124 उत्तर : ....

क्या यह सरल था? यह सरल क्यों था?

यहाँ हमने केवल अंकों की संख्या को देखकर ही उत्तर ज्ञात कर लिया। सबसे बड़ी संख्या में अधिकतम हजार थे और सबसे छोटी संख्या सैंकड़ों (सौ) अथवा दहाइयों (दस) में थी।

इस प्रकार के पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल करने के लिए अपने मित्रों को दीजिए।

हम 4875 और 3542 की तुलना किस प्रकार करते हैं? यहाँ यह अधिक कठिन नहीं है।

इन दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान है। ये दोनों हज़ारों में हैं। परंतु 4875 में हज़ार के स्थान पर अंक, 3542 के हज़ार के स्थान के अंक से बड़ा है। अतः 3542 से 4875 बड़ी है।

अब बताइए कि कौन-सी संख्या बड़ी है; 4875 या 4542? यहाँ भी दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान (बराबर) है। साथ ही, दोनों में हज़ार के स्थान पर समान अंक हैं। अब हम क्या करते हैं? हम अगले अंक की ओर बढ़ते हैं, अर्थात् सौ के स्थान पर आने वाले अंकों को देखते हैं। 4875 में सौवें स्थान वाला अंक 4542 के सौवें स्थान वाले अंक से बड़ा है। अतः संख्या 4542 से संख्या 4875 बड़ी है।



यदि दोनों संख्याओं में सौ के स्थान वाले अंक भी समान होते, तो हम क्या करते?

4875 और 4889 की तुलना कीजिए।

4875 और 4879 की तुलना कीजिए।

प्रयास कीजिए

प्रत्येक समूह में सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ ज्ञात कीजिए:

(a) 4536, 4892, 4370, 4452 (b) 15623, 15073, 15189, 15800

(c) 25286, 25245, 25270, 25210 (d) 6895, 23787, 24569, 24659

इसी प्रकार के पाँच प्रश्न और बनाइए और हल करने के लिए अपने मित्रों को दीजिए।

1.2.1 आप कितनी संख्याएँ बना सकते हैं?

आपने इस प्रकार के प्रश्न पहले भी किए होंगे। आइए ऐसे ही कुछ और प्रश्न हल करें।

मान लीजिए हमारे पास अंक 7, 8, 3 और 5 हैं। हमें इन अंकों से चार अंकों वाली भिन्न-भिन्न ऐसी संख्याएँ बनाने को कहा जाता है कि एक संख्या में कोई भी अंक दोबारा न आए (अर्थात् किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो)। इस प्रकार,

संख्या 7835 तो बनाई जा सकती है, परंतु 7735 नहीं। इन 4 अंकों से जितनी संख्याएँ बना सकते हैं, बनाइए।

आपको सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या कौन-सी प्राप्त होती है? यहाँ सबसे बड़ी संख्या 8753 है और सबसे छोटी संख्या 3578 है। दोनों में अंकों के क्रम के बारे में सोचिए। क्या आप बता सकते हैं कि दिए गए अंकों से सबसे बड़ी संख्या किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है? अपनी प्रक्रिया को लिखिए।

प्रयास कीजिए

1. बिना पुनरावृत्ति किए, दिए हुए अंकों का प्रयोग करके चार अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए :

   (a) 2, 8, 7, 4 (b) 9, 7, 4, 1 (c) 4, 7, 5, 0

   (d) 1, 7, 6, 2 (e) 5, 4, 0, 3

   (संकेत : 0754 तीन अंकों की संख्या है।)

2. किसी एक अंक का दो बार प्रयोग करके चार अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए:

   (a) 3, 8, 7 (b) 9, 0, 5 (c) 0, 4, 9 (d) 8, 5, 1

   (संकेत : प्रत्येक स्थिति में सोचिए कि आप किस अंक का दो बार प्रयोग करेंगे।)

3. दिए हुए प्रतिबन्धों के साथ, किन्हीं चार अंकों का प्रयोग करके, 4 अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए:

(a)	अंक 7 सदैव इकाई के	सबसे बड़ी	9	8	6	7
	स्थान पर रहे।	सबसे छोटी	1	0	2	7

(ध्यान दीजिए, अंक 0 से संख्या प्रारंभ नहीं हो सकती। क्यों?)

(b)	अंक 4 सदैव दहाई के	सबसे बड़ी			4	
	स्थान पर रहे।	सबसे छोटी			4	
(c)	अंक 9 सदैव सौ के	सबसे बड़ी		9		
	स्थान पर रहे।	सबसे छोटी		9		

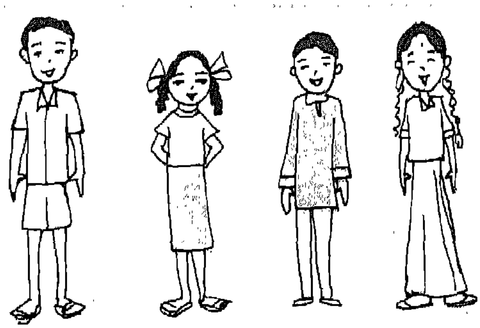
(d) अंक 1 सदैव हज़ार के स्थान पर रहे। | सबसे बड़ी
| सबसे छोटी

4. मान लीजिए, आप दो अंक 2 और 3 लेते हैं। इन अंकों को समान बार दोहराते हुए, चार अंकों की संख्याएँ बनाइए। कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है? कौन सी संख्या सबसे छोटी है?

आप ऐसी कुल कितनी संख्याएँ बना सकते हैं?

उचित क्रम में खड़े होना :

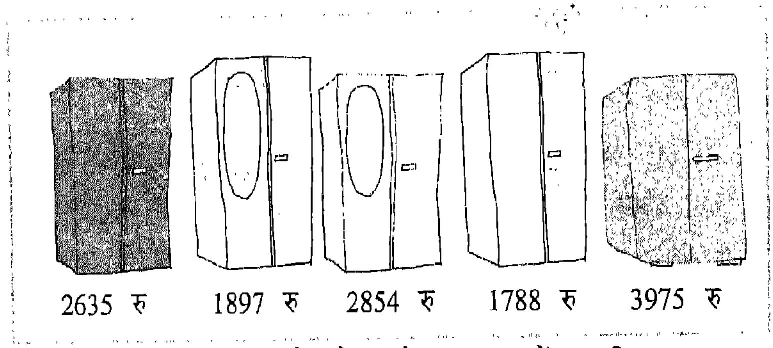
1. इनमें कौन सबसे लंबा है?
2. इनमें कौन सबसे छोटा है?
   (a) क्या आप इन्हें इनकी लंबाइयों के बढ़ते हुए क्रम में खड़ा कर सकते हैं?
   (b) क्या आप इन्हें इनकी लंबाइयों के घटते हुए क्रम में खड़ा कर सकते हैं?



रामहरि (160 सेमी) डोली (154 सेमी) मोहन (158 सेमी) शशि (159 सेमी)

क्या खरीदें?

सोहन और रीता एक अलमारी खरीदने गए। वहाँ कई अलमारियाँ उपलब्ध थीं जिन पर उनके मूल्यों की पर्चियाँ लगी हुई थीं -



(a) क्या आप इनके मूल्यों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित कर सकते हैं?

(b) क्या आप इनके मूल्यों को घटते हुए क्रम में व्यवस्थित कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

इसी प्रकार की पाँच और स्थितियों को सोचिए जहाँ आप 3 या अधिक राशियों की तुलना करते हैं।

आरोही क्रम (Ascending order) : आरोही या बढ़ते हुए क्रम का अर्थ है सबसे छोटे से प्रारंभ कर सबसे बड़े तक व्यवस्थित करना।

अवरोही क्रम (Descending order) : अवरोही क्रम या घटते हुए क्रम का अर्थ है सबसे बड़े से प्रारंभ कर सबसे छोटे तक व्यवस्थित करना।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए:

   (a) 847, 9754, 8320, 571

   (b) 9801, 25751, 36501, 38802

2. निम्नलिखित संख्याओं को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए:

   (a) 5000, 7500, 85400, 7861

   (b) 1971, 45321, 88715, 92547

आरोही/अवरोही क्रमों के ऐसे ही दस उदाहरण और बनाइए और उन्हें आरोही/अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

1.2.2 अंकों का स्थानांतरण

क्या आपने सोचा है कि यदि किसी संख्या के अंकों के स्थान परस्पर बदल दिए जाएँ तो क्या होगा?

सोचिए कि 182 क्या बन जाएगा। यह 821 जैसी बड़ी हो सकती है अथवा 128 जैसी छोटी। यही प्रक्रिया 391 के साथ करके देखिए।

अब आगे दिए हुए प्रश्नों पर ध्यान दीजिए। तीन भिन्न-भिन्न अंकों की कोई संख्या लीजिए और सौ के स्थान के अंक को इकाई के स्थान के अंक से बदलिए।

(a) क्या नई संख्या पहली संख्या से बड़ी है?

(b) क्या नई संख्या पहली संख्या से छोटी है?

इस प्रकार बनने वाली संख्याओं को आरोही और अवरोही दोनों क्रमों में लिखिए -



पहले **7 9 5**

पहली और तीसरी टाइलों को परस्पर बदलने पर

बाद में **5 9 7**

विभिन्न अंक लेकर यदि आप पहली और तीसरी टाइलों (अंकों) को परस्पर बदलते हैं, तो

किस स्थिति में संख्या बड़ी हो जाती है?

किस स्थिति में संख्या छोटी हो जाती है?

यह प्रक्रिया चार अंकों की कोई संख्या लेकर दोहराइए।

1.2.3 संख्या 10000 का प्रवेश

हम जानते हैं कि 99 से आगे दो अंकों वाली कोई संख्या नहीं है। 99 दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या है। इसी प्रकार, 999 तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या है और चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। यदि हम 9999 में 1 जोड़ें, तो हमें क्या प्राप्त होगा?

इस प्रतिरूप को देखिए

$$9 + 1 = 10 = 10 \times 1$$
$$99 + 1 = 100 = 10 \times 10$$
$$999 + 1 = 1000 = 10 \times 100$$

हम देखते हैं कि

एक अंक की सबसे बड़ी संख्या + 1 = दो अंकों की सबसे छोटी संख्या,

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या,

तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = चार अंकों की सबसे छोटी संख्या।

तब हम क्या यह नहीं सोच सकते कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर, हमें पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होगी, अर्थात् 9999 +1 = 10000 होगा। इस प्रकार, 9999 से ठीक आगे आने वाली संख्या 10000 है। इसे दस हज़ार कहते हैं। साथ ही, हम सोच सकते हैं कि $10000 = 10 \times 1000$ होगा।

1.2.4 स्थानीय मान पर पुनर्दृष्टि

आप स्थानीय मान के बारे में बहुत पहले पढ़ चुके हैं, तथा 78 जैसी दो अंकों की संख्या का प्रसारित रूप आपको अवश्य याद होगा। यह इस प्रकार है:

$$78 = 70 + 8$$
$$= 7 \times 10 + 8$$

इसी प्रकार, आपको तीन अंकों की संख्या जैसे 278 का प्रसारित रूप भी याद होगा। यह इस प्रकार है:

$$278 = 200 + 70 + 8$$
$$= 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

हम कहते हैं कि 8 इकाई के स्थान पर है, 7 दहाई के स्थान पर है और 2 सौ के स्थान पर है।

बाद में, हमने इसी अवधारणा को चार अंकों की संख्या के लिए भी लागू कर लिया था।

उदाहरणार्थ, 5278 का प्रसारित रूप है:

$$5278 = 5000 + 200 + 70 + 8$$
$$= 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

यहाँ, इकाई के स्थान पर 8, दहाई के स्थान पर 7, सौ के स्थान पर 2 और हज़ार के स्थान पर 5 है।

संख्या 10000 ज्ञात हो जाने पर, हम इस अवधारणा को और आगे लागू कर सकते हैं। हम पाँच अंकों की संख्या जैसे 45278 को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$45278 = 4 \times 10000 + 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

यहाँ हम कहते हैं कि इकाई के स्थान पर 8, दहाई के स्थान पर 7, सौ के स्थान पर 2, हज़ार के स्थान पर 5 और दस हज़ार के स्थान पर 4 है। इस संख्या को पैंतालीस हज़ार दो सौ अठ्ठत्तर पढ़ा जाता है। क्या अब आप यह सही मानते हैं कि पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या 10000 है?

प्रयास कीजिए

संख्याओं को पढ़िए और जहाँ-जहाँ रिक्त स्थान हैं उनके नाम लिखिए और प्रसारित रूप में लिखिए :

संख्या	**संख्या का नाम**	**प्रसारित रूप**
20000	बीस हज़ार	2×10000
26000	छब्बीस हज़ार	$2 \times 10000 + 6 \times 1000$
38400	अड़तीस हज़ार चार सौ	$3 \times 10000 + 8 \times 1000 + 4 \times 100$
65740	पैंसठ हज़ार सात सौ चालीस	$6 \times 10000 + 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 4 \times 10$
89324	नवासी हज़ार तीन सौ चौबीस	$8 \times 10000 + 9 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$
50000	________________	________________
41000	________________	________________
47300	________________	________________
57630	________________	________________
29485	________________	________________
29085	________________	________________
20085	________________	________________
20005	________________	________________

पाँच अंकों वाली पाँच और संख्याएँ लिखिए, उन्हें पढ़िए और उनको प्रसारित रूप में लिखिए।

1.2.5 संख्या 100000 का प्रवेश

पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या कौन–सी है? पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर छः अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होनी चाहिए। अर्थात्

99,999 + 1 = 1,00,000

इस संख्या को **एक लाख** नाम दिया जाता है। एक लाख 99999 के ठीक आगे आने वाली संख्या है।

साथ ही, 10,000 × 10 = 1,00,000

अब हम 6 अंकों की संख्याएँ और उनके प्रसारित रूप लिख सकते हैं। जैसे:

2,46,853 = 2 × 1,00,000 + 4 × 10,000 + 6 × 1,000 + 8 × 100 + 5 × 10 + 3 × 1

इस संख्या में, इकाई के स्थान पर 3, दहाई के स्थान पर 5, सौ के स्थान पर 8, हज़ार के स्थान पर 6, दस हज़ार के स्थान पर 4 और लाख के स्थान पर 2 है। इस संख्या का नाम दो लाख छियालीस हज़ार आठ सौ त्रेपन है।

प्रयास कीजिए

संख्याओं को पढ़कर उन्हें रिक्त स्थानों में प्रसारित रूप में और उनके नाम लिखिए :

संख्या	संख्या का नाम	प्रसारित रूप
3,00,000	तीन लाख	3 × 1,00,000
3,50,000	तीन लाख पचास हज़ार	3 × 1,00,000 + 5 × 10,000
3,53,500	तीन लाख त्रेपन हज़ार पाँच सौ	3 × 1,00,000 + 5 × 10,000 + 3 × 1000 + 5 × 100
4,57,928	______	______
4,07,928	______	______
4,00,829	______	______
4,00,029	______	______

1.2.6 बड़ी संख्याएँ

यदि हम 6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ें, तो हमें 7 अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है, जिसे **दस लाख** कहते हैं।

6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या और 7 अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए।

7 अंकों की सबसे बड़ी संख्या और 8 अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए।
8 अंकों की सबसे छोटी संख्या **एक करोड़** है।

प्रतिरूप को पूरा कीजिए :

9 + 1	= 10
99 + 1	= 100
999 + 1	= _______
9,999 + 1	= _______
99,999 + 1	= _______
9,99,999 + 1	= _______
99,99,999 + 1	= 1,00,00,000

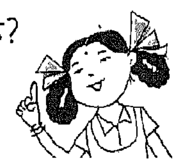
याद रखिए :

1 सौ	= 10 दहाइयाँ
1 हज़ार	= 10 सौ
	= 100 दहाइयाँ
1 लाख	= 100 हज़ार
	= 1000 सौ
1 करोड़	= 100 लाख
	= 10,000 हज़ार

प्रयास कीजिए

1. 10 – 1 क्या है?
2. 100 – 1 क्या है?
3. 10,000 – 1 क्या है?
4. 1,00,000 – 1 क्या है?
5. 1,00,00,000 – 1 क्या है?

(संकेत : प्रतिरूप को पहचानिए)



अनेक विभिन्न स्थितियों में हमारे सम्मुख बड़ी संख्याएँ आती हैं। उदाहरणार्थ, आपकी कक्षा के बच्चों की संख्या दो अंकों की होगी, जबकि आपके स्कूल के कुल बच्चों की संख्या 3 या 4 अंकों की होगी। पास के शहर में रहने वाले लोगों की संख्या और अधिक बड़ी होगी।

क्या यह 5 या 6 या 7 अंकों की संख्या है? क्या आप अपने राज्य में रहने वाले लोगों की संख्या के बारे में जानते हैं?

इस संख्या में कितने अंक होंगे?

गेहूँ से भरी एक बोरी में दानों (grains) की संख्या क्या होगी? यह एक 5 अंकों की संख्या या 6 अंकों की संख्या या और बड़ी संख्या होगी?

प्रयास कीजिए

1. ऐसे पाँच उदाहरण दीजिए जहाँ गिनी जाने वाली वस्तुओं की संख्या 6 अंकों की संख्या से अधिक होगी।
2. 6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या से प्रारंभ करते हुए, अवरोही क्रम में पिछली पाँच संख्याएँ लिखिए।
3. 8 अंकों की सबसे छोटी संख्या से प्रारंभ करते हुए, आरोही क्रम में अगली पाँच संख्याएँ लिखिए और उन्हें पढ़िए।

1.2.7 बड़ी संख्याएँ पढ़ने और लिखने में एक सहायता

निम्नलिखित संख्याओं को पढ़ने का प्रयत्न कीजिए:

(a) 279453 (b) 5035472

(c) 152700375 (d) 40350894

क्या आपको कुछ कठिनाई हुई?

आपको ऐसा करने में क्या कठिनाई हुई?

कभी-कभी बड़ी संख्याओं के पढ़ने और लिखने में कुछ सूचक (indicators) लगे होते हैं। शगुफ्ता भी सूचकों का प्रयोग करती है जो उसे बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में सहायता करते हैं। उसके ये सूचक, संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखने में भी सहायक होते हैं। उदाहरणार्थ, वह 257 में इकाई के स्थान, दहाई के स्थान और सौ के स्थान पर अंकों को ज्ञात करके उन्हें सारणी में O, T और H के नीचे निम्न प्रकार से लिखती है:

H	T	O	प्रसारित रूप
2	5	7	$2 \times 100 + 5 \times 10 + 7 \times 1$

इसी प्रकार, 2902 के लिए वह प्राप्त करती है:

Th	H	T	O	प्रसारित रूप
2	9	0	2	$2 \times 1000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1$

वह इस अवधारणा को लाखों तक की संख्याओं के लिए लागू करती है, जैसा कि नीचे दी हुई सारणी में देखा जा सकता है। (हम इन्हें शगुप्ता के खाने या बक्स (Boxes) कहेंगें)। ध्यान से देखिए और रिक्त स्थानों पर छूटी हुई प्रविष्टियों को भरिए:

संख्या	TLa	La	TTh	Th	H	T	O	संख्या नाम	प्रसारित रूप
7,34,543		7	3	4	5	4	3	सात लाख चौंतीस हज़ार पाँच सौ तेंतालीस	----------------
32,75,829	3	2	7	5	8	2	9	-------------------	$3 \times 10,00,000$ $+ 2 \times 1,00,000$ $+ 7 \times 10,000$ $+ 5 \times 1000$ $+ 8 \times 100$ $+ 2 \times 10 + 9 \times 1$

इसी प्रकार, हम करोड़ों तक की संख्याओं को सम्मिलित कर सकते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

संख्या	TCr	Cr	TLa	La	TTh	Th	H	T	O	संख्या नाम
2,57,34,543	-	2	5	7	3	4	5	4	3	____________
65,32,75,829	6	5	3	2	7	5	8	2	9	पैंसठ करोड़ बत्तीस लाख पचत्तर हज़ार आठ सौ उनतीस

आप संख्याओं के प्रसारित रूप में लिखने के लिए अन्य तालिकाओं का प्रारूप भी बना सकते हैं।

अल्प विरामों (commas) का प्रयोग :

आपने ध्यान दिया होगा कि उपरोक्त तालिकाओं में बड़ी संख्याओं के लिखने में हमने अल्प विरामों का प्रयोग किया है। बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में अल्प विराम हमारी बड़ी सहायता करते हैं। **संख्यांकन की भारतीय पद्धति (Indian system of numeration)** में हम इकाई, दहाई, सौ (सैंकड़ा), हज़ारों का प्रयोग करते हैं तथा आगे लाखों और करोड़ों का प्रयोग करते हैं। हज़ारों, लाखों और करोड़ों को प्रदर्शित करने के लिए अल्प विरामों का प्रयोग किया जाता है।

पहला अल्प विराम सौ के स्थान (दाएँ से चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हज़ारों को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्प विराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवे अंक) के बाद आता है। यह दस हज़ार के स्थान के बाद आता है और लाखों को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्प विराम अन्य दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है। यह दस लाख के स्थान के बाद आता है और करोड़ों को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ, 5, 08, 01, 592
3, 32, 40, 781
7, 27, 05, 062

ऊपर दी हुई संख्याओं को पढ़ने का प्रयत्न कीजिए। इसी रूप में पाँच और संख्याओं को लिखिए और फिर उन्हें पढ़िए।

अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय (International) पद्धति में, इकाई, दहाई, सौ, हजारों और आगे मिलियनों (millions) का प्रयोग किया जाता है। हज़ारों और मिलियनों को प्रदर्शित करने के लिए अल्प विरामों का प्रयोग किया जाता है। अल्प विराम दाएँ से प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है। पहला अल्प विराम हजारों को प्रदर्शित करता है और दूसरा अल्प विराम मिलियनों को प्रदर्शित करता है। उदाहरणार्थ, संख्या 50, 801, 592 को अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में पचास मिलियन आठ सौ एक हज़ार पाँच सौ बानवे पढ़ा जाता है। भारतीय पद्धति में, यह पाँच करोड़ आठ लाख एक हज़ार पाँच सौ बानवे है।

कितने लाख से एक मिलियन बनता है?

कितने मिलियन से एक करोड़ बनता है?

तीन बड़ी संख्याओं को लीजिए। इन्हें भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय दोनों संख्यांकन पद्धतियों में व्यक्त कीजिए।

इसमें आपकी रूचि हो सकती है:

सौ मिलियनों से बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए, अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में बिलियनों (Billions) का प्रयोग किया जाता है।

1 बिलियन = 1000 मिलियन

क्या आप जानते हैं?

भारत की जनसंख्या में इस प्रकार वृद्धि हुई है:

1921-1931 के अंतराल में 27 मिलियन;

1931-1941 के अंतराल में 37 मिलियन;

1941-1951 के अंतराल में 44 मिलियन;

1951-1961 के अंतराल में 78 मिलियन;

1991-2001 के अंतराल में कितनी वृद्धि हुई। इस जानकारी को प्राप्त करने का प्रयत्न कीजिए। क्या आप जानते हैं कि इस समय भारत की जनसंख्या कितनी है? पता करने का प्रयत्न कीजिए।

1. इन संख्याओं को पढ़िए। शगुफ्ता की तरह बक्सों का प्रयोग करते हुए लिखिए और फिर प्रसारित रूप में लिखिए:

   (i) 475320 (ii) 9847215

   (iii) 97645310 (iv) 30458094

   (a) इनमें कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

   (b) इनमें कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है?

   (c) इन संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।

2. निम्नलिखित संख्याओं को देखिए :

   (i) 527864 (ii) 95432

   (iii) 18950049 (iv) 70002509

   (a) इन संख्याओं को शगुफ्ता की तरह बक्सों का प्रयोग करते हुए लिखिए और फिर अल्प विरामों का प्रयोग करते हुए लिखिए।

   (b) इनमें कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

   (c) इनमें कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है?

   (d) इन संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।

3. ऐसी ही तीन और बड़ी संख्याएँ लेकर इस प्रक्रिया को दोहराइए।

क्या आप संख्यांक लिखने में मेरी सहायता कर सकते हैं?

एक संख्या के संख्यांक लिखने के लिए, आप पुनः बक्सों का प्रयोग कर सकते हैं:

(a) बयालीस लाख सत्तर हज़ार आठ।

(b) दो करोड़ नब्बे लाख पचपन हज़ार आठ सौ।

(c) सात करोड़ साठ हज़ार पचपन। हज़ार

प्रयास कीजिए

1. आपके पास 4, 5, 6, 0, 7 और 8 के अंक हैं। इनका प्रयोग करते हुए 6 अंकों की पाँच संख्याएँ बनाइए।
   (a) पढ़ने में सरलता के लिए अल्प विराम लगाइए।
   (b) इन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।
2. अंकों 4, 5, 6, 7, 8 और 9 का प्रयोग कर 8 अंकों की कोई तीन संख्याएँ बनाइए। पढ़ने में सरलता के लिए, अल्प विरामों का प्रयोग कीजिए।
3. अंकों 3, 0 और 4 का प्रयोग कर 6 अंकों की पाँच संख्याएँ बनाइए। अल्प विरामों का भी प्रयोग कीजिए।

प्रश्नावली 1.1

1. रिक्त स्थानों को भरिए :
   (a) 1 लाख = _______ दस हज़ार।
   (b) 1 मिलियन = _______ सौ हज़ार।
   (c) 1 करोड़ = _______ दस लाख
   (d) 1 करोड़ = _______ मिलियन
   (e) 1 मिलियन = _______ लाख
2. सही स्थानों पर अल्प विराम लगाते हुए, संख्यांकों को लिखिए :
   (a) तिहत्तर लाख पचहत्तर हज़ार तीन सौ सात।
   (b) नौ करोड़ पाँच लाख इकतालीस।
   (c) सात करोड़ बावन लाख इक्कीस हज़ार तीन सौ दो।
   (d) अट्ठावन मिलियन चार सौ तेइस हज़ार दो सौ दो।
   (e) तेइस लाख तीस हज़ार दस।

3. उपयुक्त स्थानों पर अल्प विराम लगाइए और संख्या नामों को भारतीय संख्यांकन पद्धति में लिखिए:

   (a) 87595762 (b) 8546283 (c) 99900046 (d) 98432701

4. उपयुक्त स्थानों पर अल्प विराम लगाइए और संख्या नामों को अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में लिखिए:

   (a) 78921092 (b) 7452283 (c) 99985102 (d) 48049831

1.3 व्यावहारिक प्रयोग में बड़ी संख्याएँ

पिछली कक्षाओं में, हम पढ़ चुके हैं कि लंबाई के एक मात्रक (या इकाई) (unit) के लिए सेंटीमीटर (सेमी) का प्रयोग किया जाता है। पेंसिल की लंबाई, अपनी पुस्तक या अभ्यास-पुस्तिका की चौड़ाई इत्यादि मापने के लिए हम सेंटीमीटर का प्रयोग करते हैं। हमारे रूलर पर सेंटीमीटर के चिह्न अंकित होते हैं। परंतु, एक पेंसिल की मोटाई मापने के लिए हम पाते हैं कि सेंटीमीटर एक बड़ा मात्रक है। अत: पेंसिल की मोटाई दर्शाने के लिए, हम एक छोटे मात्रक मिलीमीटर (मिमी) का प्रयोग करते हैं।

(a) 10 मिलीमीटर = 1 सेंटीमीटर

अपनी कक्षा के कमरे की लंबाई या स्कूल के भवन की लंबाई मापने के लिए, हम पाते हैं कि सेंटीमीटर एक बहुत छोटा मात्रक है। अत: इस कार्य के लिए हम मीटर का प्रयोग करते हैं।

(b) 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर = 1000 मिलीमीटर

यदि हमें दो शहरों, जैसे दिल्ली-मुम्बई या दिल्ली-कोलकाता के बीच की दूरियाँ बतानी हों, तो मीटर भी एक बहुत छोटा मात्रक होता है। इसके लिए हम एक बड़े मात्रक किलोमीटर (किमी) का प्रयोग करते हैं।

(c) 1 किलोमीटर = 1000 मीटर

कितने मिलीमीटरों से 1 किलोमीटर बनता है?

चूँकि 1 मीटर = 1000 मिमी, इसलिए

1 किमी = 1000 मी = 1000 × 1000 मिमी = 10,00,000 मिमी

प्रयास कीजिए

1. कितने सेंटीमीटरों से एक किलोमीटर बनता है?
2. भारत के पाँच बड़े शहरों के नाम लिखिए। उनकी जनसंख्या पता कीजिए। इन शहरों में से प्रत्येक युग्म शहरों के बीच की दूरी भी किलोमीटरों में पता कीजिए।



हम बाजार में गेहूँ या चावल खरीदने जाते हैं। हम इन्हें किलोग्राम (किग्रा) में खरीदते हैं। परंतु अदरक या मिर्च जैसी वस्तुओं की हमें अधिक मात्रा में आवश्यकता नहीं होती है। हम इन्हें ग्राम (ग्रा) में खरीदते हैं। हम जानते हैं कि

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम

बीमार पड़ने पर जो दवाई की गोली ली जाती है, क्या उसके भार पर कभी आपने ध्यान दिया है? यह बहुत कम होता है। यह भार मिलीग्राम (मिग्रा) में होता है।

1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम

प्रयास कीजिए

1. कितने मिलीग्राम से एक किलोग्राम बनता है?
2. दवाई की गोलियों के एक बक्से में 2,00,000 गोलियाँ हैं, जिनमें प्रत्येक का भार 20 मिग्रा है। इस बक्से में रखी सभी गोलियों का कुल भार ग्रामों में कितना है और किलोग्रामों में कितना है?

पानी वाली एक साधारण बाल्टी की धारिता (capacity) प्राय: कितनी होती है? यह प्राय: 20 लीटर होती है। धारिता को लीटर में दर्शाया जाता है, परंतु कभी-कभी हमें एक छोटे मात्रक की भी आवश्यकता पड़ती है। यह मात्रक मिलीलीटर है। बालों के तेल, सफाई करने वाले द्रव या एक सॉफ्ट ड्रिंक (पेय) की बोतलों पर जो मात्रा लिखी होती है वह उनके अंदर भरे द्रव की मात्रा को मिलीलीटर में दर्शाती है।



1 लीटर = 1000 मिलीलीटर

ध्यान दीजिए कि इन सभी मात्रकों में, हम कुछ सर्वनिष्ठ शब्दों जैसे किलो, मिली और सेंटी को पाते हैं। आपको याद रखना चाहिए कि किलो का अर्थ है हज़ार और यह इनमें सबसे बड़ा है और मिली का अर्थ है हज़ारवां भाग और यह सबसे छोटा है। किलो 1000 गुना दर्शाता है, जबकि मिली हज़ारवां भाग दर्शाता है। अर्थात् 1 किलोग्राम = 1000 ग्राम और 1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम है।

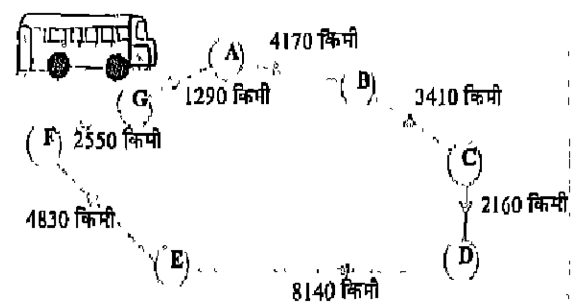
इसी प्रकार, सेंटी सौवां भाग दर्शाता है। अर्थात् 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर है।

एक बस ने अपनी यात्रा प्रारंभ की और 60 किमी/घण्टा की चाल से विभिन्न स्थानों पर पहुँची। इस यात्रा को नीचे दर्शाया गया है।

(i) A से D तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(ii) D से G तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।



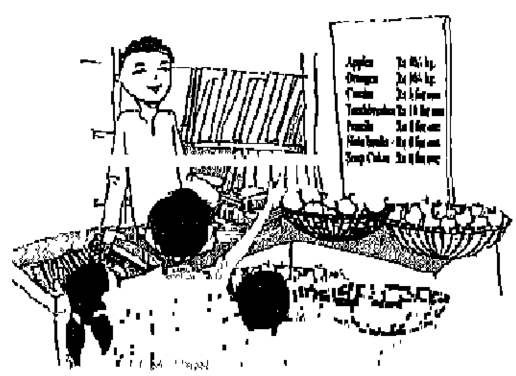
(iv) क्या आप C से D तक और D से E तक की दूरियों का अंतर ज्ञात कर सकते हैं?

(v) बस द्वारा निम्नलिखित यात्रा में लिया समय ज्ञात कीजिए:

(a) A से B तक (b) C से D तक (c) E से G तक

(d) कुल यात्रा

वस्तुएँ	मूल्य
सेब	40 रु प्रति किग्रा
संतरा	30 रु प्रति किग्रा
कंघा	3 रु प्रति नग



दाँतों का ब्रुश	10 रु प्रति नग
पेंसिल	1 रु प्रति नग
अभ्यास-पुस्तिका	6 रु प्रति नग
साबुन की टिकिया	8 रु प्रति नग

पिछले वर्ष की बिक्री

सेब	2457 किग्रा
संतरा	3004 किग्रा
कंघा	22760
दाँतों का ब्रुश	25367
पेंसिल	38530
अभ्यास-पुस्तिका	40002
साबुन की टिकिया	20005

(a) क्या आप रमन द्वारा पिछले वर्ष बेचे गए सेब और संतरों का कुल भार ज्ञात कर सकते हैं?

सेबों का भार = _________ किग्रा

संतरों का भार = _________ किग्रा

अतः, कुल भार = _________ किग्रा + _____ किग्रा = _____ किग्रा.

उत्तर : संतरों और सेबों का कुल भार = _________

(b) क्या आप रमन द्वारा सेबों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कर सकते हैं?

(c) क्या आप रमन द्वारा सेबों और संतरों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कर सकते हैं?

(d) रमन द्वारा प्रत्येक वस्तु के बेचने से प्राप्त धनराशियों को दर्शाने वाली एक सारणी बनाइए। धनराशियों की इन प्रविष्टियों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। वह कौन-सी वस्तु है जिससे रमन को सबसे अधिक धनराशि प्राप्त हुई? यह धनराशि क्या है?

जोड़, घटा, गुणा और भाग पर हम अनेक प्रश्न कर चुके हैं। यहाँ हम ऐसे कुछ और प्रश्न करेंगे। प्रारंभ करने से पहले निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए तथा प्रश्नों के विश्लेषण का अनुसरण कीजिए और देखिए कि इन्हें किस प्रकार हल किया गया है।

उदाहरण 1 : वर्ष 1991 में सुंदरनगर की जनसंख्या 2,35,471 थी। वर्ष 2001 में पता चला कि जनसंख्या में 72,958 की वृद्धि हो गई। वर्ष 2001 में इस शहर की जनसंख्या क्या थी?

हल : 2001 में इस शहर की जनसंख्या

= 1991 में जनसंख्या + जनसंख्या में वृद्धि

= 2,35,471 + 72,958

अब,

$$\begin{array}{r} 235471 \\ +\ \ 72958 \\ \hline 308429 \\ \hline \end{array}$$

सलमा ने इन संख्याओं को इस प्रकार जोड़ा : 235471 = 200000 + 35000 + 471 = 72958 = 72000 + 958 और फिर 200000 + 107000 + 1429 = 308429 तथा मेरी ने इस जोड़ को इस प्रकार किया : 200000 + 35000 + 400 + 71 + 72000 + 900 + 58 = 308429

उत्तर : 2001 में शहर की जनसंख्या 3,08,429 थी।

उदाहरण 2 : किसी राज्य में, वर्ष 2002–2003 में 7,43,000 साइकिल बेची गईं। वर्ष 2003–2004 में बेची गई साइकिलों की संख्या 8,00,100 थी। किस वर्ष में अधिक साइकिल बेची गईं और कितनी अधिक बेची गईं?

हल : स्पष्ट है कि संख्या 8,00,100 संख्या 7,43,000 से अधिक है। अतः, उस राज्य में वर्ष 2003–2004 में वर्ष 2002–2003 से अधिक साइकिलें बेची गईं। अब,

$$\begin{array}{r} 800100 \\ -\ \ 743000 \\ \hline 057100 \\ \hline \end{array}$$

जोड़ कर उत्तर की जाँच कीजिए:

$$\begin{array}{r} 743000 \\ +\quad 57100 \\ \hline 800100 \\ \hline \end{array}$$ (उत्तर सही है)

क्या आप इसे करने के और भी तरीके सोच सकते हैं?

उत्तर : वर्ष 2003-2004 में 57,100 साइकिलें अधिक बेची गईं।

उदाहरण 3 : एक शहर में समाचार पत्र प्रतिदिन छपता है। एक प्रति में 12 पृष्ठ होते हैं। प्रतिदिन इस समाचार पत्र की 11,980 प्रतियाँ छपती हैं। प्रतिदिन सभी प्रतियों के लिए कितने पृष्ठ छपते हैं?

हल : प्रत्येक प्रति में 12 पृष्ठ हैं।

अतः, 11,980 प्रतियों में 12 × 11,980 पृष्ठ होंगे।

यह संख्या क्या होगी? 1,00,000 से अधिक या कम।

अब,

$$\begin{array}{r} 11980 \\ \times\ 12 \\ \hline 23960 \\ +\ 119800 \\ \hline 143760 \\ \hline \end{array}$$

उत्तर : प्रतिदिन सभी प्रतियों के लिए 1,43,760 पृष्ठ छपते हैं।

उदाहरण 4 : अभ्यास-पुस्तिकाएँ बनाने के लिए कागज़ की 75,000 शीट (sheet) उपलब्ध हैं। प्रत्येक शीट से अभ्यास-पुस्तिका के 8 पृष्ठ बनते हैं। प्रत्येक अभ्यास-पुस्तिका में 200 पृष्ठ हैं। उपलब्ध कागज़ से कितनी अभ्यास-पुस्तिकाएँ बनाई जा सकती हैं?

हल : प्रत्येक शीट से 8 पृष्ठ बनते हैं।

अतः, 75,000 शीटों से 8 × 75,000 पृष्ठ बनेंगे।

$$\begin{array}{r} 75000 \\ \times\quad 8 \\ \hline 600000 \\ \hline \end{array}$$

इस प्रकार, अभ्यास-पुस्तिका बनाने के लिए 6,00,000 पृष्ठ उपलब्ध हैं।

अब, 200 पृष्ठों से एक अभ्यास-पुस्तिका बनती है।

अतः, 6,00,000 पृष्ठों से 6,00,000 ÷ 200 अभ्यास-पुस्तिकाएँ बनेंगी।

```
              3000
अब,    200 ) 600000
              600
            -------
               0000
            -------
```

उत्तर : 3,000 अभ्यास-पुस्तिकाएँ।

1. किसी स्कूल में चार दिन के लिए एक पुस्तक प्रदर्शनी आयोजित की गई। पहले, दूसरे, तीसरे और अंतिम दिन खिड़की पर क्रमश: 1094, 1812, 2050 और 2751 टिकट बेचे गए। इन चार दिनों में बेचे गए टिकटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
2. शेखर एक प्रसिद्ध क्रिकेट खिलाड़ी है। वह टैस्ट मैचों में अब तक 6980 रन बना चुका है। वह 10,000 रन पूरे करना चाहता है। उसे कितने और रनों की आवश्यकता है?
3. एक चुनाव में, सफल प्रत्याशी ने 5,77,500 मत प्राप्त किए, जबकि उसके निकटतम प्रतिद्वन्दी ने 3,48,700 मत प्राप्त किए। सफल प्रत्याशी ने चुनाव कितने मतों से जीता?
4. कीर्ति बुक-स्टोर ने जून के प्रथम सप्ताह में 2,85,891 रु मूल्य की पुस्तकें बेचीं। इसी माह के दूसरे सप्ताह में 4,00,768 रु मूल्य की पुस्तकें बेची गईं। दोनों सप्ताहों में कुल मिलाकर कितनी बिक्री हुई? किस सप्ताह में बिक्री अधिक हुई और कितनी अधिक?
5. अंकों 6, 2, 7, 4 और 3 में से प्रत्येक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याओं का अंतर ज्ञात कीजिए।
6. एक मशीन औसतन एक दिन में 2,825 पेंच बनाती है। जनवरी 2006 में उस मशीन ने कितने पेंच बनाए?
7. एक व्यापारी के पास 78,592 रु थे। उसने 40 रेडियो खरीदने का ऑर्डर दिया, तथा प्रत्येक रेडियो का मूल्य 1200 रु था। इस खरीददारी के बाद उसके पास कितनी धनराशि शेष रह जाएगी?

8. एक विद्यार्थी ने 7236 को 56 के स्थान पर 65 से गुणा कर दिया। उसका उत्तर सही उत्तर से कितना अधिक था? (संकेत : दोनों गुणा करना आवश्यक नहीं)।

9. एक कमीज़ सीने के लिए 2 मी 15 सेमी कपड़े की आवश्यकता है। 40 मी कपड़े में से कितनी कमीजें सी जा सकती हैं और कितना कपड़ा शेष बच जाएगा?



10. दवाइयों को बक्सों में भरा गया है और ऐसे प्रत्येक बक्स का भार 4 किग्रा 500 ग्रा है। एक वैन (Van), में जो 800 किग्रा से अधिक का भार नहीं ले जा सकती, ऐसे कितने बक्से लादे जा सकते हैं?

11. एक स्कूल और किसी विद्यार्थी के घर के बीच की दूरी 1 किमी 875 मी है। प्रत्येक दिन यह दूरी दो बार तय की जाती है। 6 दिन में उस विद्यार्थी द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

12. एक बर्तन में 4 ली 500 मिली दही है। 25 मिली धारिता वाले कितने गिलासों में इसे भरा जा सकता है?

1.3.1 आकलन

समाचार

1. भारत और पाकिस्तान के बीच हुए एक हॉकी मैच को जिसे स्टेडियम में 51,000 दर्शकों ने देखा और विश्व भर में 40 मिलियन लोगों ने टेलीविजन पर देखा, हार-जीत का फैसला न हो सका।

2. भारत और बंगलादेश के तटवर्तीय क्षेत्रों में आए एक चक्रवाती तूफान में लगभग 2000 व्यक्तियों की मृत्यु हो गई और 50000 से अधिक घायल हुए।

3. पिछले सप्ताह 20,000 से अधिक व्यक्तियों ने जादूगर ओ.पी. शर्मा के शो का आनंद लिया।

4. रेलवे द्वारा प्रतिदिन 63,000 किलोमीटर से अधिक रेलपथ पर 13 मिलियन से अधिक यात्री यात्रा करते हैं।

क्या हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि इन समाचारों में जितने व्यक्ति कहे गए हैं वहाँ ठीक उतने ही व्यक्ति थे? उदाहरणार्थ,

(a) क्या स्टेडियम में ठीक 51,000 दर्शक थे?

(b) क्या टेलीविजन पर ठीक 40 मिलियन लोगों ने मैच देखा?

(c) शब्द लगभग स्वयं यह दर्शाता है कि चक्रवाती तूफान के कारण मरने और घायल होने वाले व्यक्तियों की संख्या क्रमश: ठीक 2000 और 50000 नहीं थी। ये संख्याएँ दर्शाई गई संख्याओं से कुछ अधिक या कम हो सकती हैं।

(d) इसी प्रकार, भारतीय रेलवे द्वारा यात्रा करने वाले यात्रियों की वास्तविक संख्या दी हुई संख्या के बराबर नहीं हो सकती है, परंतु इससे कुछ अधिक या कम हो सकती है।

इन उदाहरणों में दी गई संख्याओं को ठीक-ठीक गिनकर (या यथार्थ रूप से) नहीं लिखा गया है, बल्कि ये उस संख्या के बारे में अनुमान देने वाले आकलन (estimate) हैं।

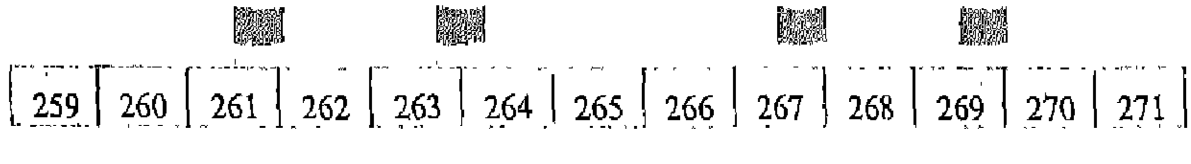
हम सन्निकट (approximate) मान कहाँ निकालते हैं? अपने घर पर होने वाले एक बड़े उत्सव की कल्पना कीजिए। पहला काम जो आप करेंगे वह यह होगा कि आप यह पता करेंगे कि आपके घर पर लगभग कितने मेहमान आ सकते हैं। क्या आप मेहमानों की ठीक (exact) संख्या का विचार लेकर प्रारंभ कर सकते हैं? व्यवहारिक रूप से यह असंभव है।

हमारे देश के वित्त मंत्री प्रति वर्ष बजट पेश करते हैं। मंत्री महोदय 'शिक्षा' मद के अंतर्गत कुछ राशि का प्रावधान रखते हैं। क्या यह राशि यथार्थ रूप से सही होगी? यह उस वर्ष देश में शिक्षा पर व्यय होने वाली आवश्यक धनराशि का केवल एक विवेकसंगत अच्छा अनुमान या आकलन (estimate) हो सकता है।

उन स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ आपको ठीक-ठीक संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है तथा इनकी उन स्थितियों से तुलना कीजिए जहाँ आप केवल एक सन्निकट आकलित (estimated) संख्या से ही काम चला लेते हैं। ऐसी स्थितियों के तीन उदाहरण दीजिए।

1.3.2 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन

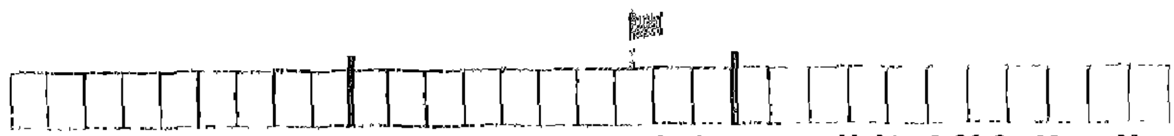
निम्नलिखित चित्र को देखिए :



(a) ज्ञात कीजिए कि कौन-से झंडे 270 की तुलना में 260 के अधिक समीप हैं।

(b) ज्ञात कीजिए कि कौन-से झंडे 260 की तुलना में 270 के अधिक समीप हैं।

पटरी की संख्याओं 10, 17 और 20 के स्थानों को देखिए। क्या संख्या 17 संख्या 10 के अधिक निकट है या 20 के? 17 और 20 के बीच का रिक्त स्थान 17 और 10 के बीच के रिक्त स्थान की तुलना में कम है। इसलिए, हम 17 को निकटतम दहाई तक 20 के रूप में सन्निकटित करते हैं।



अब 12 को लीजिए। यह भी 10 और 20 के बीच स्थित है। परंतु 12 संख्या 20 की तुलना में 10 से अधिक निकट है। इसलिए हम 12 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटित करते हैं।

आप 76 को निकटतम दहाई तक किस प्रकार सन्निकटित करेंगे? क्या यह 80 नहीं है?

हम देखते हैं कि संख्याएँ 1,2,3 और 4 संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित करते हैं। संख्याएँ 6, 7, 8 और 9 संख्या 10 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें 10 के रूप में सन्निकटित करते हैं। संख्या 5, संख्याओं 0 और 10 से बराबर की दूरी पर है। यह सामान्य परिपाटी है कि इसे 10 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

प्रयास कीजिए

इन संख्याओं को निकटतम दहाई तक सन्निकटित कीजिए:

28	32	52	41	39	48
64	59	99	215	1453	2936

1.3.3 सन्निकटन द्वारा निकटतम सैंकड़े तक आकलन

संख्या 410 संख्या 400 के अधिक निकट है या 500 के अधिक निकट है?

410, संख्या 400 के अधिक निकट (समीप) है, इसलिए इसे निकटतम सौ तक 400 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्या 889, संख्याओं 800 और 900 के बीच में है।

यह 900 के अधिक निकट है। इसलिए, इसे निकटतम सौ तक 900 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्याएँ 1 से 49, संख्या 100 की तुलना में, संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। 51 से 99 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 100 से अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। संख्या 50 संख्याओं 0 और 100 से बराबर दूरी पर है। सामान्य परिपाटी अनुसार, इसे 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सन्निकटन (सैंकड़े तक) सही हैं या नहीं :

841 → 800; 9537 → 9500; 49730 → 49700;
2546 → 2500; 286 → 300; 5750 → 5800;
168 → 200; 149 → 100; 9870 → 9800.

उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं।

1.3.4 सन्निकटन द्वारा निकटतम हज़ार तक आकलन

हम जानते हैं कि 1 से 499 तक की संख्याएँ 1000 की तुलना में 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित करते हैं। 501 से 999 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 1000 के अधिक निकट है। इसलिए, इन्हें 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्या 500 को भी 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

निम्नलिखित सन्निकटनों की जाँच कीजिए और उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं।

2573 → 3000; 53552 → 53000;
6404 → 6000; 65437 → 65000;
7805 → 7000; 3499 → 4000

प्रयास कीजिए

दी हुई संख्या को निकटतम दहाई, सौ, हजार और दस हज़ार तक सन्निकटित कीजिए :

दी हुई संख्या	निम्न के निकटतम	सन्निकटित रूप
75847	दहाई	________
75847	सौ	________
75847	हजार	________
75847	दस हज़ार	________

1.3.5 संख्या संक्रियाओं के परिणामों का आकलन

हम संख्याओं को किस प्रकार जोड़ते हैं? हम संख्याओं को एक एल्गोरिथ्म (algorithm) (दी हुई विधि) का चरणबद्ध रूप से प्रयोग करते हुए जोड़ते हैं। हम संख्याओं को यह ध्यान रखते हुए लिखते हैं कि एक ही स्थान (इकाई, दहाई, सौ, इत्यादि) के अंक एक ही स्तंभ (Column) में रहें। उदाहरणार्थ, 3946 + 6579 + 2050 को निम्न रूप में लिखते हैं :

TTh	Th	H	T	O
	3	9	4	6
	6	5	7	9
+	2	0	5	0

फिर हम इकाई वाले स्तंभ की संख्याओं को जोड़ते हैं। यदि आवश्यक हो, तो हम एक उचित संख्या को हासिल के रूप में दहाई के स्थान पर ले जाते हैं, जैसे कि इस स्थिति में है। फिर हम इसी प्रकार दहाई के स्तंभ की संख्याओं को जोड़ते हैं और ऐसा आगे चलता रहता है। आप शेष प्रश्न को स्वयं पूर्ण कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में स्पष्टत: समय लगता है।

अनेक स्थितियों में, हमें उत्तरों को अधिक तीव्रता से ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, जब आप किसी मेले या बाजार में कुछ धनराशि लेकर जाते हैं, तो आकर्षक वस्तुओं की किस्मों और मात्राओं को देखकर वहाँ आप सोचते हैं कि सभी को खरीद लिया जाए। आपको तुरन्त यह निर्णय लेने की आवश्यकता होती है कि आप किन-किन वस्तुओं को खरीद सकते हैं। इसके लिए आपको आवश्यक धनराशि का आकलन करने की आवश्यकता पड़ती है, जो उन वस्तुओं के मूल्यों का योग होती है जिन्हें आप खरीदना चाहते हैं।

किसी विशेष दिन, एक व्यापारी को दो स्थानों से धनराशि प्राप्त होनी है। एक स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि 13,569 रु है और अन्य स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि 26,785 रु है। उसे शाम तक किसी अन्य व्यक्ति को 37,000 रु देने हैं। वह संख्याओं को उनके निकटतम हज़ारों तक सन्निकटित करता है और तुरन्त कच्चा या रफ (rough) उत्तर निकाल लेता है। वह खुश हो जाता है कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। क्या आप सोचते हैं कि उसके पास पर्याप्त धनराशि होगी? क्या आप बिना यथार्थ योग किए यह बता सकते हैं?

शीला और मोहन को अपना मासिक बजट बनाना है उन्हें परिवहन, स्कूल की आवश्यकताओं, किराने का सामान, दूध और कपड़ों पर होने वाले अपने मासिक व्यय के बारे में भी जानकारी है तथा अन्य नियमित व्ययों की भी जानकारी है। इस महीने में उन्हें घूमने भी जाना है और उपहार भी खरीदने हैं। वे इन सभी पर होने वाले व्ययों का आकलन करते हैं और उन्हें जोड़कर देखते हैं कि जो राशि उनके पास है वह पर्याप्त है या नहीं। क्या वे हज़ारों तक सन्निकटित करेंगे, जैसा कि व्यापारी ने किया था? ऐसी पाँच और स्थितियों के बारे में सोचिए और चर्चा कीजिए, जहाँ हमें योग या अंतरों का आकलन करना पड़ता है। क्या हम इन सभी में एक ही स्थान तक सन्निकट मान ज्ञात करते हैं?

जब आप संख्याओं के परिणामों का आकलन करते हैं, तो उसके लिए कोई निश्चित नियम नहीं है। यह विधि इस पर निर्भर करती है कि परिशुद्धता की वाँछित मात्रा कितनी है, आकलन कितनी जल्दी चाहिए तथा सबसे महत्त्वपूर्ण बात है कि अनुमानित उत्तर कितना अर्थपूर्ण होगा।

1.3.6 योग अथवा अंतर का आकलन

जैसा कि हमने ऊपर देखा, हम एक संख्या को किसी भी स्थान तक सन्निकटित कर सकते हैं। व्यापारी ने धनराशि को निकटतम हज़ारों तक सन्निकटित किया और संतुष्ट हो गया कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। इसलिए जब आपको किसी योग अथवा अंतर का आकलन करना है, तो आपको यह पता होना चाहिए कि आप क्यों सन्निकटित कर रहे हैं और इसलिए किस स्थान तक आपको सन्निकटित करना है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:

उदाहरण 5 : 5,290 + 17,986 का आकलन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 17,986 > 5,290 है।

हम निकटतम हज़ारों तक सन्निकटित करते हैं।

17,986 सन्निकटित होता है	18,000
+5,290 सन्निकटित होता है	+ 5,000
आकलित योग =	23,000

क्या यह विधि काम करती है? आप यथार्थ उत्तर ज्ञात करके जाँच कर सकते हैं कि यह आकलन विवेकपूर्ण है या नहीं।

उदाहरण 6 : 5,673 – 436 का आकलन कीजिए।

हल : प्रारंभ में, हम हज़ारों तक सन्निकटित करते हैं। (क्यों?)

5,673 सन्निकटित होता है	6,000
– 436 सन्निकटित होता है	– 0
आकलित अंतर =	6,000

यह विवेकपूर्ण आकलन नहीं है। यह विवेकपूर्ण क्यों नहीं है? निकटतम आकलन प्राप्त करने के लिए, आइए प्रत्येक संख्या को निकटतम सौ तक सन्निकटित करने का प्रयत्न करें।

5,673 सन्निकटित होता है	5,700
– 436 सन्निकटित होता है	– 400
आकलित अंतर =	5,300

यह एक अच्छा और अधिक अर्थपूर्ण आकलन है।

प्रश्नावली 1.3

1. आकलन कीजिए :

   (a) 730 + 998 (b) 796 – 314

   (c) 12,904 + 2,888 (d) 28,292 – 21,496

   जोड़ने, घटाने और उनके परिणामों के आकलन के दस और उदाहरण बनाइए।

2. एक मोटेतौर पर (Rough) आकलन (सौ तक सन्निकटन) और एक निकटतम आकलन (दस तक सन्निकटन) दीजिए :

   (a) 439 + 334 + 4,317 (b) 1,08,734 – 47,599

   (c) 8325 – 491 (d) 4,89,348 – 48,365

   ऐसे चार और उदाहरण बनाइए।

1.4 आकलन करना : गुणनफल अथवा भागफल

हम गुणनफल का किस प्रकार आकलन करते हैं?

19×78 के लिए आकलन क्या है?

स्पष्ट है कि यह गुणनफल 2000 से कम है। क्यों? यदि हम 19 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो हमें 20 प्राप्त होता है और फिर 78 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो 80 प्राप्त होता है। अब $20 \times 80 = 1600$ है।

63×182 को देखिए।

यदि हम दोनों संख्याओं का निकटतम सौ तक का मान निकालें, तो हमें $100 \times 200 = 20{,}000$ प्राप्त होता है। यह वास्तविक गुणनफल से बहुत अधिक है। इसलिए अब हम क्या करें? एक अधिक विवेकपूर्ण आकलन ज्ञात करने के लिए हम 63 और 182 दोनों को निकटतम दहाई तक सन्निकटित करते हैं। ये क्रमशः 60 और 180 हैं। इसे हम 60×180 अर्थात् 10,800 प्राप्त करते हैं। यह एक अच्छा आकलन है, परंतु यह इतनी जल्दी प्राप्त नहीं होता है। यदि हम 63 को निकटतम दहाई तक 60 लें और 182 को निकटतम सौ तक 200 लें, तो हमें $60 \times 200 = 12{,}000$ प्राप्त होता है, यह गुणनफल का एक अच्छा आकलन है और जल्दी भी प्राप्त हो जाता है।

सन्निकटन का व्यापक नियम यह है कि प्रत्येक गुणा की जाने वाली संख्या को उसके सबसे बड़े स्थान तक सन्निकटित कीजिए और सन्निकटित संख्याओं को गुणा कर दीजिए। इस प्रकार, उपरोक्त उदाहरण में हमने 63 को दहाई तक और 182 को सौ तक सन्निकटित किया है।

अब उपरोक्त नियम का प्रयोग करके, 81 × 479 का आकलन कीजिए।

479 सन्निकटित होता है 500 के (सौ तक सन्निकटित)

81 सन्निकटित होता है 80 के (दहाई तक सन्निकटित)

अत:, आकलित गुणनफल = 500 × 80 = 40,000 है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित गुणनफलों का आकलन कीजिए :

(a) 87 × 313　　(b) 9 × 795

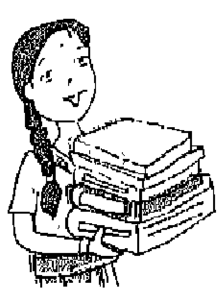
(c) 898 × 785　　(d) 958 × 387

ऐसे ही पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल कीजिए।

आपके लिए आकलनों का एक महत्त्वपूर्ण उपयोग यह है कि आप अपने उत्तरों की जाँच कर सकते हैं। मान लीजिए आपने 37 × 1889 ज्ञात किया है, परंतु आप निश्चित नहीं है कि उत्तर सही है या नहीं। इस गुणनफल का एक तुरन्त (जल्दी) प्राप्त होने वाला और विवेकपूर्ण आकलन 40 × 2000 = 80000 है। यदि आपका उत्तर 80,000 के निकट है, तो संभवत: आपका उत्तर सही है। दूसरी ओर, यदि यह 8000 या 8,00,000 के निकट है, तो आपके गुणा करने में अवश्य ही कुछ गलती हुई है।

1.4.1 कोष्ठकों का प्रयोग

सुमन ने बाज़ार से 6 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदीं जिनका मूल्य 10 रु प्रति पुस्तिका था। उसकी बहन सामा ने इसी प्रकार की 7 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदीं। उनके द्वारा दी गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।



सीमा ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की

$6 \times 10 + 7 \times 10$

$= 60 + 70$

उत्तर = 130 रु

मीरा ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की

$6 + 7 = 13$

और 13×10

उत्तर = 130 रु

आप देख सकते हैं कि सीमा और मीरा के उत्तर प्राप्त करने की विधियों में कुछ अंतर है, परंतु दोनों के उत्तर समान हैं और प्राप्त परिणाम सही है। क्यों?

सीमा ने कहा कि मीरा ने $7 + 6 \times 10$ करके उत्तर प्राप्त किया है।

अप्पू बताता है कि $7 + 6 \times 10 = 7 + 60 = 67$ है। लेकिन मीरा ने जो उत्तर प्राप्त किया है वह यह नहीं है। बस तीनों विद्यार्थी उलझन में पड़ जाते हैं।

ऐसी स्थितियों में उलझन दूर करने के लिए हम कोष्ठकों (brackets) का प्रयोग कर सकते हैं। हम कोष्ठकों का प्रयोग करके 6 और 7 को मिलाकर एक समूह बना सकते हैं, जो दर्शाएगा कि इस समूह को एक अकेली संख्या समझा जाए। जिससे उत्तर इस प्रकार प्राप्त होता है :

$(6 + 7) \times 10 = 13 \times 10$

यह वही है जो मीरा ने किया है। उसने पहले 6 और 7 को जोड़ा और फिर प्राप्त योग को 10 से गुणा कर दिया।

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप में हमें बताता है कि पहले कोष्ठकों ( ) के अंदर दी हुई संख्याओं को एक अकेली संख्या के रूप में बदलिए और फिर बाहर दी हुई संक्रिया कीजिए जो यहाँ 10 से गुणा करना है।

प्रयास कीजिए

1. कोष्ठकों का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए व्यंजक लिखिए :

   (a) नौ और दो के योग की चार से गुणा।

   (b) अठारह और छः के अंतर को चार से भाग।

(c) पैंतालीस को तीन और दो के योग के तिगुने से भाग देना।

2. $(5 + 8) \times 6$ के लिए तीन विभिन्न स्थितियाँ लिखिए।

(ऐसी एक स्थिति है : सोहनी और रीता ने 6 दिन कार्य किया। सोहनी 5 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है और रीता 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है। दोनों ने एक सप्ताह में कुल कितने घंटे कार्य किया?)

3. निम्नलिखित के लिए पाँच स्थितियाँ लिखिए, जहाँ कोष्ठकों का प्रयोग आवश्यक हो:

(a) $7(8 - 3)$ (b) $(7 + 2)(10 - 3)$

1.4.2 कोष्ठकों का प्रसार (खोलना) (हटाना)

अब देखिए कि किस प्रकार कोष्ठकों के प्रयोग और उनके प्रसार (खोलने या हटाने) से, हमें अपने कार्य को क्रमबद्ध रूप से करने में सहायता मिलती है। क्या आप सोचते हैं कि कोष्ठकों का बिना प्रयोग किए जिन चरणों का हम पालन कर रहे हैं उन्हें समझ पाएँगे?

(i) $7 \times 109 = 7 \times (100 + 9) = 7 \times 100 + 7 \times 9 = 700 + 63 = 763$

(ii) $102 \times 103 = (100 + 2) \times (100 + 3)$

$= 100 \times 100 + 2 \times 100 + 100 \times 3 + 2 \times 3$

$= 10,000 + 200 + 300 + 6 = 10,000 + 500 + 6$

$= 10,506$

(iii) $17 \times 109 = (10 + 7) \times 109 = 10 \times 109 + 7 \times 109$

$= 10 \times (100 + 9) + 7 \times (100 + 9)$

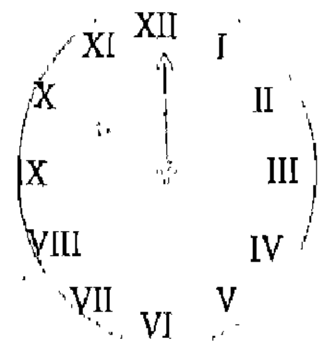
$= 10 \times 100 + 10 \times 9 + 7 \times 100 + 7 \times 9$

$= 1000 + 90 + 700 + 63 = 1,790 + 63 = 1,853$

यह सामान्य परिपाटी है कि $68 = 6 \times 10 + 8$ जैसे प्रश्न में पहले $6 \times 10 = 60$ प्राप्त किया जाए और फिर उसमें 8 जोड़ दिया जाए। इस सामान्य परिपाटी के कारण, किसी उलझन की संभावना नहीं है, और इस प्रकार आपको कोष्ठकों का प्रयोग करने की भी आवश्यकता नहीं है, क्योंकि $68 = (6 \times 10) + 8$ ही है।

1.4.3 रोमन संख्यांक

अभी तक हम हिंदू-अरेबिक संख्यांकों (Hindi Arabic Numerals) की पद्धति का ही प्रयोग करते रहे हैं। यह एकमात्र संख्यांक पद्धति नहीं हैं। संख्यांक लिखने की पुरानी पद्धतियों में से एक पद्धति रोमन संख्यांकों (Roman Numerals) की पद्धति है। यह पद्धति अभी भी अनेक स्थानों पर प्रयोग की जाती है। उदाहरणार्थ, हम घड़ियों में रोमन संख्यांकों का प्रयोग देख सकते हैं। इनका प्रयोग स्कूल की समय-सारणी में कक्षाओं के लिए भी किया जाता है, इत्यादि।



ऐसे तीन और उदाहरण ज्ञात कीजिए जहाँ रोमन संख्यांकों का प्रयोग होता है।

रोमन संख्यांक

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X

क्रमश: संख्याएँ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 और 10 व्यक्त करते हैं। इसके बाद 11 के लिए XI और 12 के लिए XII,... 20 के लिए XX का प्रयोग होता है।

इस पद्धति के कुछ और संख्यांक संगत हिंदू-अरेबिक संख्यांकों के साथ इस प्रकार हैं :

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

इस पद्धति के नियम इस प्रकार हैं :

(a) यदि किसी संकेत की पुनरावृत्ति होती है, तो जितनी बार वह आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है। अर्थात् II बराबर 2 है, XX बराबर 20, है और XXX बराबर 30 है।

(b) कोई संकेत तीन से अधिक बार नहीं आता है। परंतु संकेतों V, L और D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(c) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं ओर जाता है, तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है। जैसे :

VI = 5 + 1 = 6   XII = 10 + 2 = 12

LXV = 50 + 10 + 5 = 65

(d) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत बड़े मान वाले किसी संकेत के बाईं ओर आता है, तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है। जैसे :

IV = 5 – 1 = 4   IX = 10 – 1 = 9

XL = 50 – 10 = 40   XC = 100 – 10 = 90

(e) संकेतों V, L और D को कभी भी बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर नहीं लिखा जाता है। अर्थात् V, L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है।

संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M और C में से ही घटाया जा सकता है।

इन नियमों का पालन करने से, हमें प्राप्त होता है :

1	=	I	10	=	X	100	=	C
2	=	II	20	=	XX			
3	=	III	30	=	XXX			
4	=	IV	40	=	XL			
5	=	V	50	=	L			
6	=	VI	60	=	LX			
7	=	VII	70	=	LXX			
8	=	VIII	80	=	LXXX			
9	=	IX	90	=	XC			

(a) उपरोक्त संख्याओं के बीच की संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए।

(b) XXXX, VX, IC, XVV ... इत्यादि, नहीं लिखे जाते हैं। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

उदाहरण 7 : निम्नलिखित को रोमन संख्यांकों में लिखिए :

(a) 69   (b) 98

हल : (a) 69 = 60 + 9
= (50 + 10) + 9
= LX + IX

इसलिए 69 = LXIX

(b) 98 = 90 + 8
= (100 – 10) + 8
= XC + VIII

इसलिए 98 = XCVIII

प्रयास कीजिए

रोमन पद्धति में लिखिए

1. 73 2. 92

हमने क्या चर्चा की?

1. दो संख्याओं में वही संख्या बड़ी होती है, जिसमें अंकों की संख्या अधिक होती है। यदि दोनों में अंकों की संख्या समान है, तब हम उनके सबसे बाएँ स्थित अंकों की तुलना करते हैं और जिस संख्या में यह अंक बड़ा होगा वही बड़ी भी होगी। अगर ये अंक भी समान हैं, तब हम इसी प्रकार अंकों की तुलना करते जाते हैं।
2. संख्याओं को आरोही (छोटे से बड़े) या अवरोही (बड़े से छोटे) क्रम में व्यवस्थित करने के लिए भी हम उपरोक्त विधि ही प्रयोग में लाते हैं।
3. दिए गए अंकों से संख्या बनाते समय, ध्यान रखना चाहिए कि संख्या को किन प्रतिबंधों के साथ बनाना है। जैसे अंकों 7, 8, 3, व 5 से, किसी भी अंक को बिना दोहराए, चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या बनाने के लिए सबसे बड़े अंक 8 को सबसे बांई ओर रखना होगा और फिर उससे छोटे अंक रखते जाएंगें।
4. चार अंकों की सबसे छोटी संख्या 1000 है। जिसका अर्थ है कि तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या 999 होगी। पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 10,000 (दस हजार) है, जिसका अर्थ है कि चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 9999 है।
इसी प्रकार आगे, छः अंकों की छोटी से छोटी संख्या 1,00,000 (एक लाख) है जिसका अर्थ है कि पाँच अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 99999 है। यही क्रम और बड़ी संख्याओं के लिए भी लागू होता है।
5. अल्प-विरामों का प्रयोग, संख्याओं के लिखने तथा पढ़ने में सहायता करता है। भारतीय संख्यांकन पद्धति में पहला अल्प विराम दाईं ओर से प्रारंभ कर तीन अंकों बाद और बाकि दो-दो अंकों बाद लगाए जाते हैं और ये अल्प विराम क्रमशः हजार, लाख व करोड़ को अलग-अलग करते हैं। अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में अल्प

विराम दाईं ओर से प्रारंभ कर तीन-तीन अंकों के बाद लगाए जाते हैं। तीन और छः अंकों के बाद अल्प विराम क्रमशः हजार व मिलियन को अलग-अलग करते हैं।

6. किसी संख्या में दाईं ओर से पहला अंक इकाई और दूसरा अंक दहाई दर्शाता है।

7. दैनिक जीवन में अनेक स्थानों पर हमें बड़ी-बड़ी संख्याओं की भी आवश्यकता होती है। जैसे किसी विद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या, गांव या शहर की जनसंख्या बड़े-बड़े लेन-देन में धन तथा दो बड़े शहरों के बीच की दूरी।

8. याद रखिए किलो का अर्थ है-हज़ार, सेंटी का अर्थ है-सौवां भाग तथा मिली का अर्थ है-हजारवा भाग, इस प्रकार 1 किलोमीटर = 1000 मीटर, 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर = 1000 मिलीमीटर

9. अनेक स्थितियों में हमें पूर्णतया सही-सही संख्याओं की आवश्यकता नहीं होती बल्कि एक उपयुक्त आकलन से ही काम चल सकता है। जैसे एक अंतर्राष्ट्रीय हॉकी मैच के दर्शकों की संख्या बताने के लिए कह देते हैं कि लगभग 51,000 दर्शकों ने मैच देखा। यहाँ हमें दर्शकों की सही संख्या की आवश्यकता नहीं है।

10. आकलन में किसी संख्या को एक वाँछित मात्रा तक परिशुद्ध करना होता है। जैसे 4117 का सन्निकटन, हजारों में 4000 तथा सैंकड़ों में 4100 किया जा सकता है, जो आवश्यकता पर निर्भर करता है।

11. अनेक स्थितियों में हमें संख्याओं पर संक्रियाओं के फलस्वरूप प्राप्त परिणामों का भी आकलन उपयोगी सिद्ध होता है। ऐसे आकलनों में हम पहले प्रयोग होने वाली संख्याओं को सन्निकटित कर शीघ्रता से परिणाम प्राप्त कर लेते हैं। ऐसे आकलन हमें अनेक योजनाएँ बनाने अथवा खरीददारी करते समय बड़ी सहायता करते हैं।

12. गणित में समस्याओं को हल करते समय ऐसे आकलन उत्तर की जाँच में सहायक हो सकते हैं।

13. अंतरों के आकलन में सावधानी बरतनी चाहिए।

14. एक ही समस्या में जब अनेक संक्रियाएँ करनी होती हैं तब हमें उनके क्रम को भी ध्यान में रखना होता है। यह क्रम स्पष्ट दर्शाने के लिए कोष्ठकों का प्रयोग किया जाता है।

15. विश्व के अनेक भागों में अनेक संख्यांकन पद्धितयाँ प्रचलित हुई। लेकिन आजकल हम पूरे विश्व में एक हिंदू-अरेबिक संख्यांकों की पद्धति ही प्रयोग में लाते हैं। एक अन्य पद्धति जो कहीं-कहीं प्रयोग की जाती है, वह रोमन संख्यांकों की पद्धति है।

अध्याय 2

पूर्ण संख्याएँ

भूमिका

जैसा कि हम जानते हैं, जब हम गिनना प्रारंभ करते हैं तब हम 1, 2, 3, 4,... का प्रयोग करते हैं। जब हम गिनती प्रारंभ करते हैं, ये हमारे सम्मुख प्राकृतिक रूप से आती हैं। इसीलिए, गणितज्ञ इन गणन (गिनती गिनने वाली) संख्याओं (Counting Numbers) को प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers) कहते हैं।

पूर्ववर्ती और परवर्ती

दी हुई एक प्राकृत संख्या में अगर 1 जोड़ दें, तो आप अगली प्राकृत संख्या प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात् आप उसका परवर्ती (successor) प्राप्त कर लेते हैं।

16 का परवर्ती 16 + 1 = 17, 19 का परवर्ती 19 +1 = 20 है और इस प्रकार आगे भी चलता रहेगा।

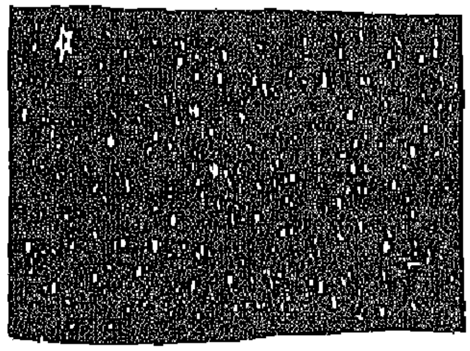
संख्या 16 संख्या 17 से ठीक पहले आती है। हम कहते हैं कि 17 का पूर्ववर्ती (predecessor) 17–1=16 है, 20 का पूर्ववर्ती 20 – 1 = 19 है, इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. 19; 1997; 12000; 49; 100000; 2440701; 100199 और 208090 के पूर्ववर्ती और परवर्ती लिखिए।
2. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या है जिसका कोई पूर्ववर्ती नहीं है?
3. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या है जिसका कोई परवर्ती नहीं है? क्या कोई अंतिम प्राकृत संख्या है?

संख्या 3 का एक पूर्ववर्ती है और एक परवर्ती है। 2 के बारे में आप क्या सोचते हैं? इसका परवर्ती 3 है और पूर्ववर्ती 1 है। क्या 1 के परवर्ती और पूर्ववर्ती दोनों हैं?

हम अपने स्कूल के बच्चों की संख्या को गिन सकते हैं, हम किसी शहर में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को भी गिन सकते हैं; हम भारत में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को गिन सकते हैं। संपूर्ण विश्व के व्यक्तियों की संख्या को भी गिना जा सकता है। हो सकता है कि हम आकाश (आसमान) में स्थित तारों या अपने सिर के बालों की संख्या को गिन न पाएँ, परंतु यदि हम इन्हें गिन पाएँ, तो इनके लिए भी कोई संख्या अवश्य होगी। फिर हम ऐसी संख्या में 1 जोड़ कर उससे बड़ी संख्या प्राप्त कर लेते हैं। ऐसी स्थिति में हम दो व्यक्तियों के सिरों के कुल बालों की संख्या तक को लिख सकते हैं।



अब यह शायद स्पष्ट है कि सबसे बड़ी कोई प्राकृत संख्या नहीं है। उपरोक्त प्रश्नों के अतिरिक्त, हमारे सम्मुख अनेक अन्य प्रश्न आते हैं जब हम प्राकृत संख्याओं के साथ कार्य करते हैं। आप ऐसे कुछ प्रश्नों के बारे में सोच सकते हैं और अपने मित्रों के साथ उनकी चर्चा कर सकते हैं। आप इन प्रश्नों में से अनेक के उत्तरों को सम्भवतः ज्ञात नहीं कर पाएँगे!

2.2 पूर्ण संख्याएँ

हम देख चुके हैं कि प्राकृत संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता है। प्राकृत संख्याओं के संग्रह (Collection) में हम 0 (शून्य) को 1 के पूर्ववर्ती के रूप में सम्मिलित करते हैं।



2

> प्राकृत संख्याएँ शून्य के साथ मिलकर पूर्ण संख्याओं (Whole numbers) का संग्रह बनाती हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ भी हैं?
2. क्या सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ भी हैं?
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी है?
4. सबसे बड़ी पूर्ण संख्या कौन-सी है?

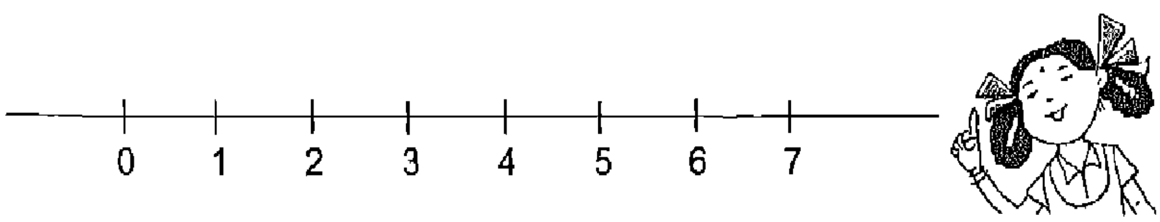
अपनी पिछली कक्षाओं में, आप पूर्ण संख्याओं पर सभी मूलभूत संक्रियाएँ, जैसे जोड़, व्यवकलन, गुणा और भाग (विभाजन), करना सीख चुके हैं। आप यह भी जानते हैं कि इनका प्रश्नों को हल करने में किस प्रकार अनुप्रयोग किया जाता है। आइए इन संक्रियाओं को एक संख्या रेखा पर करें। परंतु ऐसा करने से पहले, आइए ज्ञात करें कि संख्या रेखा क्या होती है।

2.3 संख्या रेखा

एक रेखा खींचिए। इस पर एक बिंदु अंकित कीजिए। इस बिंदु को 0 नाम दीजिए। 0 के दाईं ओर एक अन्य बिंदु अंकित कीजिए। इसे 1 नाम दीजिए।

0 और 1 से नामांकित इन बिंदुओं के बीच की दूरी एक मात्रक दूरी (unit distance) कहलाती है। इसी रेखा पर 1 के दाईं ओर 1 मात्रक दूरी पर एक बिंदु अंकित कीजिए और 2 से नामांकित कीजिए। इसी विधि का प्रयोग करते हुए, संख्या रेखा पर एक-एक मात्रक दूरी पर बिंदुओं को 3, 4, 5, ... से नामांकित करते रहिए। आप दाईं ओर किसी भी पूर्ण संख्या तक जा सकते हैं।

नीचे दी हुई रेखा पूर्ण संख्याओं के लिए संख्या रेखा है :



बिंदु 2 और 4 के बीच की दूरी क्या है? निश्चित रूप से यह दूरी 2 मात्रक है। क्या आप बिंदु 2 और 6 तथा 2 और 7 के बीच की दूरियों को बता सकते हैं?

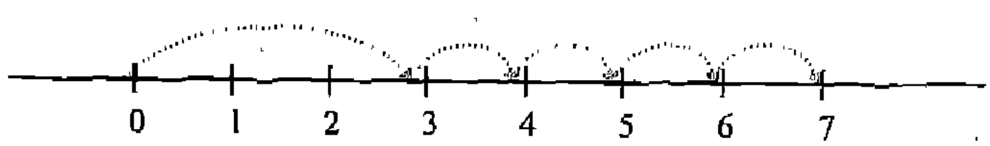
संख्या रेखा पर आप देखेंगे कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है और संख्या 7 संख्या 4 से बड़ी है, अर्थात् $7 > 4$ है। संख्या 8 संख्या 6 के दाईं ओर स्थित है और $8 > 6$ है। इन प्रेक्षणों के आधार पर, हम कह सकते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं में से वह संख्या बड़ी होती है, जो संख्या रेखा पर अन्य संख्या के दाईं ओर स्थित होती है। हम यह भी कह सकते हैं कि बाईं ओर की पूर्ण संख्या छोटी होती है। उदाहरणार्थ, $4 < 9$ है; 4, 9 के बाईं ओर स्थित है। इसी प्रकार, $12 > 5$; 12, 5 के दाईं ओर स्थित है।

आप 10 और 20 के बारे में क्या कह सकते हैं?

30, 12 और 18 की संख्या रेखा पर स्थितियाँ देखिए। कौन-सी संख्या सबसे बाईं ओर स्थित है? क्या आप 1005 और 9756 में से बता सकते हैं कि कौन-सी संख्या दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित है? संख्या रेखा पर 12 के परवर्ती और 7 के पूर्ववर्ती को दर्शाइए।

संख्या रेखा पर योग

पूर्ण संख्याओं के योग को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। आइए 3 और 4 के योग को देखें।

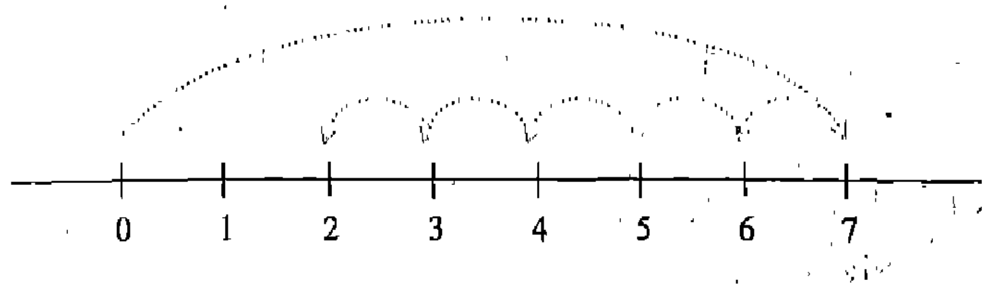


तीर के सिरे पर बिंदु 3 है। 3 से प्रारंभ कीजिए। चूँकि हमें इस संख्या में 4 जोड़ना है, इसलिए हम दाईं ओर चार कदम 3 से 4, 4 से 5, 5 से 6 और 6 से 7 चलते हैं, जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। चौथे कदम के अंतिम तीर के सिरे पर बिंदु 7 है। इस प्रकार, 3 और 4 का योग 7 है। अर्थात् $3 + 4 = 7$ है।

प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके, $4 + 5$; $2 + 6$; $3 + 5$ और $1 + 6$ को ज्ञात कीजिए।

व्यवकलन (घटाना) : दो पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन को भी संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। आइए 7 – 5 ज्ञात करें।

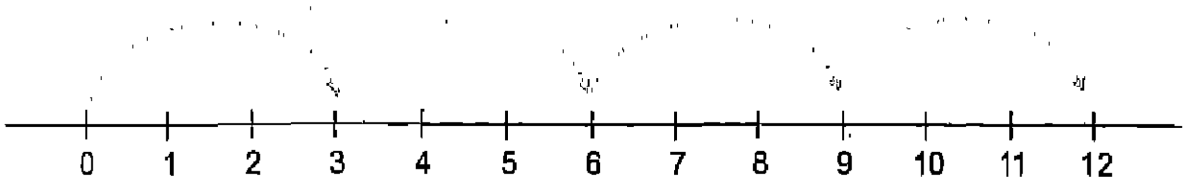


तीर के सिरे पर बिंदु 7 है। 7 से प्रारंभ कीजिए। चूँकि 5 को घटाया जाना है, इसलिए हम बाईं ओर 1 मात्रक वाले पाँच कदम चलते हैं। हम बिंदु 2 पर पहुँचते हैं। हमें 7 – 5 = 2 प्राप्त होता है।

प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके 8 – 3; 6 – 2 और 9 – 6 ज्ञात कीजिए।

गुणन (गुणा) : अब हम संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं के गुणन को देखते हैं।



आइए 3 × 4 ज्ञात करें

0 से प्रारंभ कीजिए और दाईं ओर एक बार में 3 मात्रकों के बराबर के कदम चलिए। ऐसे चार कदम चलिए। आप कहाँ पहुँचते हैं? आप 12 पर पहुँच जाएँगे। इसलिए हम कहते हैं कि 3 × 4 = 12 है।

प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके, 2 × 6; 3 × 3 और 4 × 2 को ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 2.1

1. 10999 के बाद अगली तीन प्राकृत संख्याएँ लिखिए।
2. 10001 से ठीक पहले आने वाली तीन पूर्ण संख्याएँ लिखिए।

3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?
4. 32 और 53 के बीच में कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं?
5. निम्न के परवर्ती लिखिए :
   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. निम्न के पूर्ववर्ती लिखिए :
   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों में से प्रत्येक के लिए, संख्या रेखा पर कौन सी पूर्ण संख्या अन्य संख्या के बाईं ओर स्थित है। इनके बीच में उपयुक्त चिन्ह (>, <) का प्रयोग करते हुए इन्हें लिखिए।
   (a) 530, 503 (b) 370, 307
   (c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001
8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं :
   (a) शून्य सबसे छोटी प्राकृत संख्या है।
   (b) 400, संख्या 399 का पूर्ववर्ती है।
   (c) शून्य सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (d) 600, संख्या 599 का परवर्ती है।
   (e) सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं।
   (f) सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ हैं।
   (g) दो अंकों की पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती एक अंक की संख्या कभी नहीं हो सकती है।
   (h) 1 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (i) प्राकृत संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (j) पूर्ण संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (k) पूर्ण संख्या 13, संख्याओं 11 और 12 के बीच में स्थित है।
   (l) पूर्ण संख्या 0 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (m) दो अंकों की संख्या का परवर्ती सदैव दो अंकों की एक संख्या होती है।

2.4 पूर्ण संख्याओं के गुण

जब हम पूर्ण संख्याओं पर होने वाली विभिन्न संक्रियाओं को निकटता से देखते हैं, तो उनमें अनेक गुण देखने को मिलते हैं। इन गुणों से हमें इन संख्याओं को अच्छी प्रकार से समझने में सहायता मिलती है। साथ ही, ये गुण कई संक्रियाओं को बहुत सरल भी बना देते हैं।

इन्हें कीजिए

आपकी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी को कोई भी दो पूर्ण संख्याएँ लेकर उन्हें जोड़ने को कहा जाए। क्या परिणाम सदैव एक पूर्ण संख्या आता है? आपके योग इस प्रकार के हो सकते हैं :

पूर्ण संख्याओं के ऐसे ही 5 और युग्म लेकर योग ज्ञात कीजिए। क्या योग सदैव एक पूर्ण संख्या है?

7	+	8	=	15, एक पूर्ण संख्या
5	+	5	=	10, एक पूर्ण संख्या
0	+	15	=	15, एक पूर्ण संख्या
.	+	.	=	...
.	+	.	=	...

क्या आपको पूर्ण संख्याओं का कोई ऐसा युग्म प्राप्त हुआ जिनका योग एक पूर्ण संख्या नहीं है? ऐसी कोई दो पूर्ण संख्याएँ प्राप्त करना संभव नहीं है, जिनका योग एक पूर्ण संख्या न हो। हम कहते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग एक पूर्ण संख्या होती है। चूँकि पूर्ण संख्याओं को जोड़ने से पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है, इसलिए पूर्ण संख्याओं का संग्रह योग के अंतर्गत **संवृत (Closed)** है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण (Closure property) कहलाता है।

क्या पूर्ण संख्याएँ गुणन (गुणा) के अंतर्गत भी संवृत हैं? आप इसकी जाँच किस प्रकार करेंगे?

आपके गुणन इस प्रकार हो सकते हैं :

7	×	8	=	56, एक पूर्ण संख्या
5	×	5	=	25, एक पूर्ण संख्या
0	×	15	=	0, एक पूर्ण संख्या
.	×	.	=	...
.	×	.	=	...

दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी एक पूर्ण संख्या ही होती है। अतः हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं का संग्रह (निकाय) गुणन के अंतर्गत संवृत है।

संवृत गुण : पूर्ण संख्याएँ योग के अंतर्गत तथा गुणन के अंतर्गत संवृत होती हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए:

1. पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाने) के अंतर्गत संवृत नहीं होती हैं। क्यों?

   आपके व्यवकलन इस प्रकार के हो सकते हैं :

6	–	2	=	4, एक पूर्ण संख्या
7	–	8	=	?, एक पूर्ण संख्या नहीं
5	–	4	=	1, एक पूर्ण संख्या
3	–	9	=	?, एक पूर्ण संख्या नहीं

   अपनी ओर से कुछ और उदाहरण लीजिए और उपरोक्त कथन की पुष्टि कीजिए।

2. क्या पूर्ण संख्याएँ विभाजन (भाग) के अंतर्गत संवृत हैं? नहीं।

   निम्न सारणी को देखिए :

8	÷	4	=	2, एक पूर्ण संख्या
5	÷	7	=	$\frac{5}{7}$, एक पूर्ण संख्या नहीं
12	÷	3	=	4, एक पूर्ण संख्या
6	÷	5	=	$\frac{6}{5}$, एक पूर्ण संख्या नहीं

   अपनी ओर से कुछ और उदाहरण लेकर, उपरोक्त कथन की पुष्टि कीजिए।

शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या से विभाजन (भाग देने) का अर्थ है कि उस संख्या को बार-बार घटाना।

आइए $8 \div 2$ ज्ञात करें।

8 में से 2 को बार-बार घटाइए।

$$\begin{array}{rl} & 8 \\ - & \underline{2} \quad \text{........ 1} \\ & 6 \\ - & \underline{2} \quad \text{........ 2} \\ & 4 \\ - & \underline{2} \quad \text{........ 3} \\ & 2 \\ - & \underline{2} \quad \text{........ 4} \\ & 0 \end{array}$$

कितनी बार घटाने पर हम 0 तक पहुँचे हैं? चार-बार।

इसलिए, हम $8 \div 2 = 4$ कहते हैं।

इस विधि से $24 \div 8$ और $16 \div 4$ ज्ञात कीजिए।

आइए अब $2 \div 0$ को ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ - & 0 \quad \text{........ 1} \\ & 2 \\ - & 0 \quad \text{........ 2} \\ & 2 \\ - & 0 \quad \text{........ 3} \\ & 2 \\ - & 0 \quad \text{........ 4} \\ & 2 \\ & | \end{array}$$

प्रत्येक बार घटाने पर हमें 2 पुनः प्राप्त होता है। क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी? नहीं।

हम कहते हैं कि $2 \div 0$ परिभाषित नहीं है।

आइए $7 \div 0$ ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

$$\begin{array}{r} 7 \\ -\ 0 \\ \hline 7 \\ -\ 0 \\ \hline 7 \\ -\ 0 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \ldots\ldots 1 \\ \\ \ldots\ldots 2 \\ \\ \ldots\ldots 3 \\ \\ \end{array}$$

पुन: हमें घटाने के किसी भी स्तर पर 0 नहीं प्राप्त होता है।

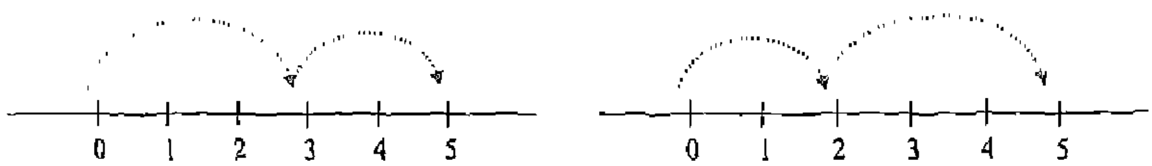
हम कहते हैं कि 7 ÷ 0 परिभाषित नहीं है।

5 ÷ 0 और 16 ÷ 0 के लिए भी इसकी जाँच कीजिए।

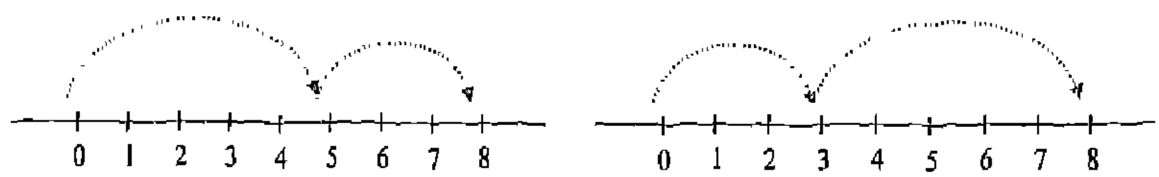
पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

योग और गुणन की क्रमविनिमेयता

संख्या रेखा के निम्नलिखित चित्र क्या दर्शाते हैं? दोनों स्थितियों में, हम 5 पर पहुँचते हैं।



अत: 3 + 2 और 2 + 3 बराबर हैं। दोनों से एक ही उत्तर 5 प्राप्त होता है।



इसी प्रकार, 5 + 3 और 3 + 5 भी बराबर हैं।

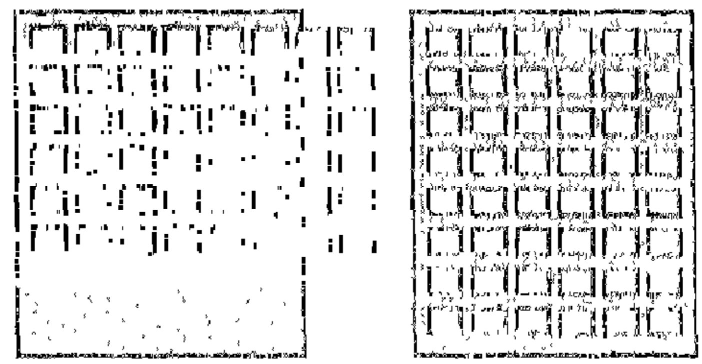
इसी प्रकार, 4 + 6 और 6 + 4 के लिए भी यही करने का प्रयत्न कीजिए। क्या यह तब भी सत्य है। जब हम किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं, आपको पूर्ण संख्याओं का कोई भी ऐसा युग्म नहीं मिलेगा जिसमें संख्याओं के जोड़ने का क्रम बदलने पर योग भिन्न-भिन्न प्राप्त हों।



आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड सकते हैं।

हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए योग क्रमविनिमेय (commutative) है। यह गुण योग की क्रमविनिमेयता कहलाता है।

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए :



आपके घर पर एक छोटा उत्सव है। आप मेहमानों के लिए, कुर्सियों की 6 पंक्तियाँ बनाते हैं, जिनमें से प्रत्येक पंक्ति में 8 कुर्सियाँ हैं। कमरा इतना चौड़ा नहीं है कि उसमें 8 कुर्सियों वाली पंक्तियाँ समा सकें। आप यह निर्णय लेते हैं कि कुर्सियों की 8 पंक्तियाँ बनाएँ, जिनमें से प्रत्येक पंक्ति में 6 कुर्सियाँ हों। क्या आपको और अधिक कुर्सियों की आवश्यकता पड़ेगी?

क्या गुणन का भी क्रमविनिमेयता गुण होता है? संख्याओं 4 और 5 को अलग-अलग क्रमों में गुणा कीजिए। आप देखेंगे कि $4 \times 5 = 5 \times 4$ है।

क्या यह संख्याओं 3 और 6 तथा 5 और 7 के लिए भी सत्य हैं?



आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा कर सकते हैं।

हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय है।

इस प्रकार, पूर्ण संख्याओं के लिए, योग और गुणन दोनों ही क्रमविनिमेय हैं।

जाँच कीजिए :
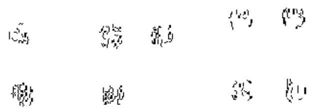
(i) पूर्ण संख्याओं के लिए, व्यवकलन (घटाना) क्रमविनिमेय नहीं है। इसकी जाँच संख्याओं के तीन विभिन्न युग्म लेकर कीजिए।

(ii) क्या $(6 \div 3)$ वही है जो $(3 \div 6)$ है?

पूर्ण संख्याओं के कुछ और युग्म लेकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

योग और गुणन की सहचारिता

निम्नलिखित चित्रों को देखिए :

(a) $(2+3)+4=5+4=9$ 

(b) $2+(3+4)=2+7=9$ 

उपरोक्त में, (a) के अनुसार आप पहले 2 और 3 को जोड़कर प्राप्त योग में 4 जोड़ सकते हैं।

साथ ही, (b) के अनुसार आप पहले 3 और 4 को जोड़कर प्राप्त योग में 2 जोड़ सकते हैं।

क्या दोनों परिणाम समान नहीं हैं?

हम यह भी प्राप्त करते हैं कि

$(5+7)+3=12+3=15$ तथा $5+(7+3)=5+10=15$ है।

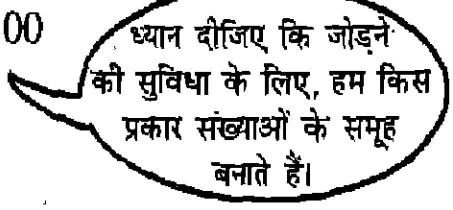
इसलिए, $(5+7)+3=5+(7+3)$ हुआ।

यह पूर्ण संख्याओं के योग का साहचर्य गुण (associative property) कहलाता है।

संख्या 2, 8 और 6 के लिए इस गुण की जाँच कीजिए।

संख्या 234, 197 और 103 को जोड़िए।

$$\begin{aligned}234+197+103 &= 234+(197+103)\\ &= 234+300\\ &= 534\end{aligned}$$

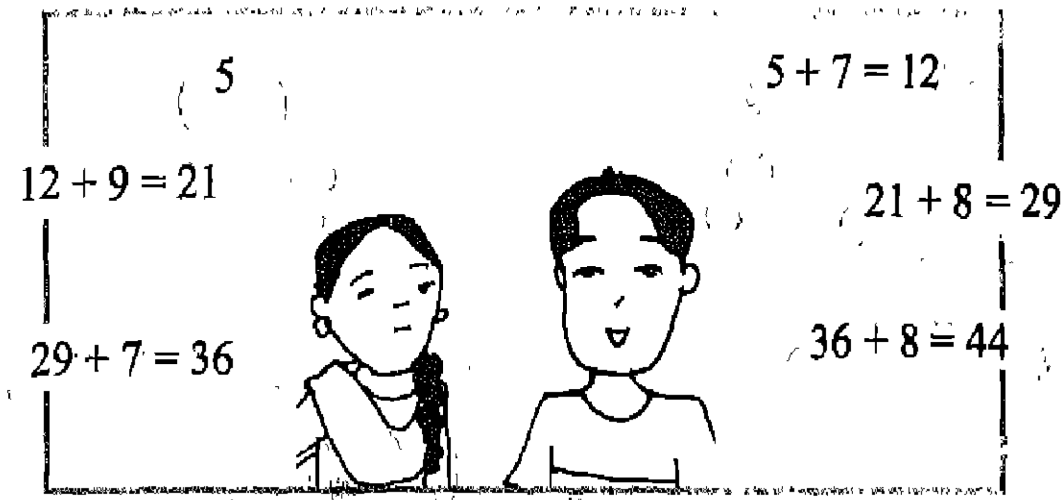


इस खेल को खेलिए :

आप और आपका मित्र इस खेल को खेल सकते हैं।

आप 1 से 10 तक में से कोई संख्या बोलिए। अब आपका मित्र इस संख्या में 1 से 10 तक की कोई भी संख्या जोड़ता है। इसके बाद आपकी बारी है। आप बारी-बारी से दोनों खेलिए। जो पहले 100 तक पहुँचता है वही जीतेगा। यदि

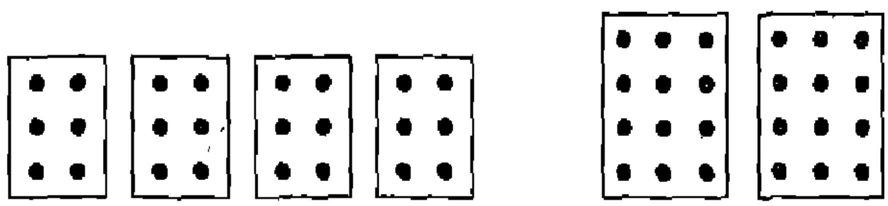
आप सदैव जीतना चाहते हैं, तो आपकी युक्ति या योजना क्या होगी?



(a) (b)

निम्नलिखित आकृतियों द्वारा प्रदर्शित गुणन तथ्यों को देखिए (आकृति 2.1):

(a) और (b) में, बिंदुओं की संख्याओं को गिनिए। आपको क्या प्राप्त होता है? दोनों में बिंदुओं की संख्याएँ बराबर हैं। (a) में, हमारे पास प्रत्येक खाने (box) में 2×3 बिंदु हैं। इसलिए, बिंदुओं की कुल संख्या $(2 \times 3) \times 4 = 24$ है।



(a) (b)

आकृति 2.1

(b) में, प्रत्येक खाने में 3×4 बिंदु हैं। इसलिए बिंदुओं की कुल संख्या $2 \times (3 \times 4) = 24$ है। इस प्रकार, $(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$ है। इसी प्रकार, आप देख सकते हैं कि $(3 \times 5) \times 4 = 3 \times (5 \times 4)$ है।

इसी को $(5 \times 6) \times 2$ और $5 \times (6 \times 2)$ तथा $(3 \times 6) \times 4$ और $3 \times (6 \times 4)$ के लिए प्रयास कीजिए।

यह पूर्ण संख्याओं के गुणन का सहचारी या साहचर्य गुण कहलाता है।

सोचिए और ज्ञात कीजिए :

कौन-सा गुणन सरल है और क्यों?

(a) $(6 \times 5) \times 3$ या $6 \times (5 \times 3)$

(b) $(9 \times 4) \times 25$ या $9 \times (4 \times 25)$



उदाहरण 2 : $14 + 17 + 6$ को दो विधियों से ज्ञात कीजिए।

हल : $14 + 17 + 6 = (14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37,$

$14 + 17 + 6 = (14 + 6) + 17 = 20 + 17 = 37$

यहाँ आपने योग के साहचर्य और क्रमविनिमेय गुणों के संयोजन (combination) को प्रयोग किया है। क्या आप सोचते हैं कि क्रमविनिमेय और साहचर्य गुण के प्रयोग से परिकलन कुछ सरल हो जाते हैं?

प्रयास कीजिए

$7 + 18 + 13$ और $16 + 12 + 4$ को ज्ञात कीजिए।

गुणन का साहचर्य गुण निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों को हल करने में उपयोगी होता है :

उदाहरण 3 : 12×35 को ज्ञात कीजिए।

हल : $12 \times 35 = (6 \times 2) \times 35 = 6 \times (2 \times 35) = 6 \times 70 = 420$

इस उदाहरण में, हमने साहचर्य गुण का उपयोग, सबसे छोटी सम संख्या को 5 के गुणज (multiple) से गुणा कर, सरलता से उत्तर प्राप्त करने के लिए किया है।

उदाहरण 4 : $8 \times 1769 \times 125$ को ज्ञात कीजिए।

$8 \times 1769 \times 125 = 8 \times 125 \times 1769$ (आप यहाँ किस गुण का प्रयोग कर रहे हैं?)

$= (8 \times 125) \times 1769 = 1000 \times 1769 = 1769000$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

25 × 8358 × 4 ; 625 × 3759 × 8

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

क्या (16 ÷ 4) ÷ 2 = 16 ÷ (4 ÷ 2) है?

क्या विभाजन के लिए साहचर्य गुण लागू होता है? नहीं।

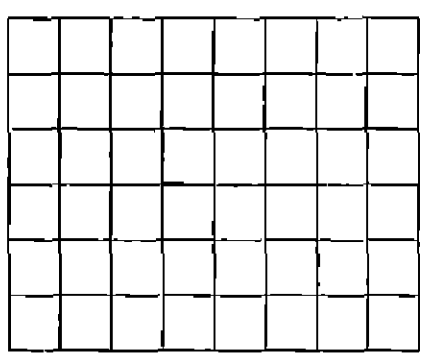
अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। क्या (28 ÷ 14) ÷ 2 और 28 ÷ (14 ÷ 2) बराबर हैं?

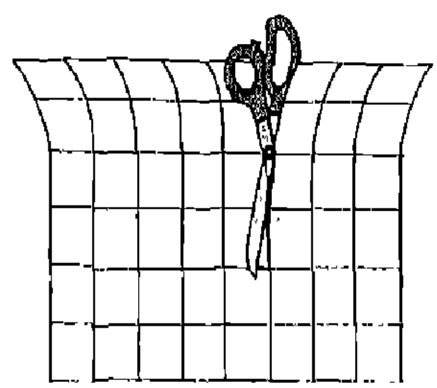
इन्हें कीजिए

योग पर गुणन का वितरण

6 सेमी × 8 सेमी मापों का एक आलेख (graph) कागज़ लीजिए जिसमें 1 सेमी × 1 सेमी मापों वाले वर्ग बने हों।

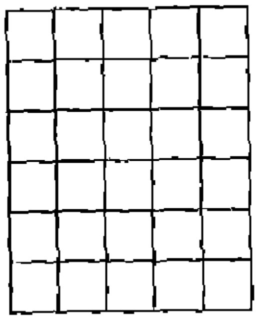
आपके पास कुल कितने वर्ग हैं?



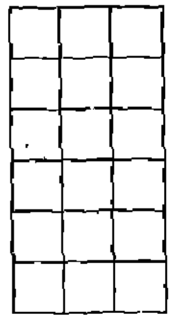


क्या यह संख्या 6 × 8 है?

अब इस कागज़ को 6 सेमी × 5 सेमी और 6 सेमी × 3 सेमी मापों वाले दो भागों में काट लीजिए, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है:



वर्गों की संख्या : क्या यह 6×5 है?



वर्गों की संख्या : क्या यह 6×3 है?

दोनों भागों में कुल मिलाकर कितने वर्ग हैं?

क्या यह $(6 \times 5) + (6 \times 3)$ है? क्या इसका अर्थ है कि $6 \times 8 = (6 \times 5) + (6 \times 3)$ है? लेकिन, $6 \times 8 = 6 \times (5 + 3)$ है। क्या यह दर्शाता है कि $6 \times (5 + 3) = (6 \times 5) + (6 \times 3)$

इसी प्रकार, आप पाएँगे कि $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$ है।

इसे योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) गुण (distributive property of multiplication over addition) कहते हैं।

वितरण (या बंटन) गुण का प्रयोग करके $4 \times (5 + 8)$; $6 \times (7 + 9)$ और $7 \times (11 + 9)$ को ज्ञात कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

अब निम्नलिखित गुणन प्रक्रिया को देखिए और चर्चा कीजिए कि क्या हम संख्याओं का गुणन करते समय योग पर गुणन के वितरण गुण की अवधारणा का प्रयोग करते हैं?

425		
×136		
2550	← 425×6	(6 इकाइयों से गुणा)
12750	← 425×30	(3 दहाइयों से गुणा)
42500	← 425×100	(1 सौ से गुणा)
57800	← $425 \times (6 + 30 + 100)$	

उदाहरण 5 : एक स्कूल की कैंटीन (Canteen) प्रतिदिन लंच (lunch) के लिए 20 रु और दूध के लिए 4 रु लेती है। इन मदों में आप 5 दिनों में कुल कितना व्यय करते हैं?

हल : इसे दो विधियों से ज्ञात किया जा सकता है।

विधि 1 : लंच के लिए 5 दिन की राशि ज्ञात कीजिए।
दूध के लिए 5 दिन की राशि ज्ञात कीजिए।
फिर इन्हें जोड़िए।

लंच की लागत $= 5 \times 20$ रु

दूध की लागत $= 5 \times 4$ रु

कुल लागत $= (5 \times 20)$ रु $+ (5 \times 4)$ रु $= (100 + 20)$ रु

$= 120$ रु

विधि 2 : एक दिन की कुल राशि ज्ञात कीजिए।
फिर इसे 5 से गुणा कीजिए।

एक दिन के (लंच + दूध) की लागत $= (20 + 4)$ रु

5 दिन की कुल लागत $= 5 \times (20 + 4)$ रु $= (5 \times 24)$ रु

$= 120$ रु

यह उदाहरण दर्शाता है कि

$5 \times (20 + 4) = (5 \times 20) + (5 \times 4)$ है।

यह योग पर गुणन के वितरण का सिद्धांत है।

उदाहरण 6 : वितरण गुण का प्रयोग करते हुए, 12×35 ज्ञात कीजिए।

हल : $12 \times 35 = 12 \times (30 + 5) = 12 \times 30 + 12 \times 5$

$= 360 + 60 = 420$

उदाहरण 7 : सरल कीजिए : $126 \times 55 + 126 \times 45$

हल : $126 \times 55 + 126 \times 45 = 126 \times (55 + 45) = 126 \times 100$

$= 12600$

इन्हें कीजिए

वितरण गुण का प्रयोग करते हुए, 15×68, 17×23 और $69 \times 78 + 22 \times 69$ के मान ज्ञात कीजिए।

तत्समक अवयव (योग और गुणन के लिए)

पूर्ण संख्याओं का संग्रह प्राकृत संख्याओं के संग्रह से किस रूप में भिन्न है? यह केवल पूर्ण संख्याओं के संग्रह में 'शून्य' की उपस्थिति के कारण है। इस संख्या 'शून्य' की योग में विशेष भूमिका है। इसका अनुमान लगाने का प्रयत्न कीजिए।

निम्नलिखित सारणी आपकी सहायता करेगी :

7	+	0	=	7
5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	.....	=	.....

जब आप शून्य को किसी पूर्ण संख्या में जोड़ते हैं, तो क्या परिणाम प्राप्त होता है?

परिणाम स्वयं वही पूर्ण संख्या होती है। इसी कारण, शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) (या तत्समक) कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक (additive identity) भी कहते हैं।

गुणन की संक्रिया में भी शून्य की एक विशेष भूमिका है। किसी भी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

$5 \times 6 = 30$
$5 \times 5 = 25$
$5 \times 4 = 20$
$5 \times 3 = 15$
$5 \times 2 = ...$
$5 \times 1 = ...$
$5 \times 0 = ?$

देखिए कि किस प्रकार गुणनफल में कमी हो रही है? क्या आप कोई प्रतिरूप देख रहे हैं? क्या आप अंतिम चरण का अनुमान लगा सकते हैं? क्या यही प्रतिरूप अन्य पूर्ण संख्याओं के लिए भी सत्य है? इसको दो अलग-अलग पूर्ण संख्याओं को लेकर ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

आपको पूर्ण संख्याओं के लिए एक योज्य तत्समक प्राप्त हुआ। किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ने पर या शून्य में पूर्ण संख्या जोड़ने पर वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। ऐसी ही स्थिति पूर्ण संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) की है। निम्नलिखित सारणी को देखिए :

7	×	1	=	7
5	×	1	=	5
1	×	12	=	12
1	×	100	=	100
.	×	.	=	.....

आप सही सोच रहे हैं। पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए, 1 तत्समक अवयव या तत्समक है। दूसरें शब्दों में, पूर्ण संख्याओं के लिए, 1 गुणनात्मक तत्समक है।

प्रश्नावली 2.2

1. उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए :
   (a) $837 + 208 + 363$ (b) $1962 + 453 + 1538 + 647$
2. उपयुक्त क्रम में लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (a) $2 \times 1768 \times 50$ (b) $4 \times 166 \times 25$
   (c) $8 \times 291 \times 125$ (d) $625 \times 279 \times 16$
   (e) $285 \times 5 \times 60$ (f) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $297 \times 17 + 297 \times 3$ (b) $54279 \times 92 + 8 \times 54279$

   (c) $81265 \times 169 - 81265 \times 69$ (d) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25 \times 218$

4. उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (a) 738×103 (b) 854×102 (c) 258×1008. (d) 1005×168

5. किसी टैक्सी-ड्राइवर ने अपनी गाड़ी की पेट्रोल टंकी में सोमवार को 40 लीटर पेट्रोल भरवाया। अगले दिन, उसने टंकी में 50 लीटर पेट्रोल भरवाया। यदि पेट्रोल का मूल्य 44 रु प्रति लीटर था, तो उसने पेट्रोल पर कुल कितना व्यय किया?

6. कोई दूधवाला एक होटल को सुबह 32 लीटर दूध देता है और शाम को 68 लीटर दूध देता है। यदि दूध का मूल्य 15 रु प्रति लीटर है, तो दूधवाले को प्रतिदिन कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

7. निम्न को सुमेलित (match) कीजिए :

   (i) $425 \times 136 = 425 \times (6 + 30 + 100)$ (a) गुणन की क्रमविनिमेयता

   (ii) $2 \times 49 \times 50 = 2 \times 50 \times 49$ (b) योग की क्रमविनिमेयता

   (iii) $80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005$ (c) योग पर गुणन का वितरण

2.5 पूर्ण संख्याओं में प्रतिरूप

हम संख्याओं को बिन्दुओं द्वारा प्रारंभिक आकारों के रूप में व्यवस्थित करेंगें। जो आकार हम लेगें वे हैं (1) एक रेखा, (2) एक आयत, (3) एक वर्ग और (4) एक त्रिभुज। प्रत्येक संख्या को इन आकारों में से एक आकार में व्यवस्थित करना चाहिए। कोई अन्य आकार नहीं होना चाहिए।

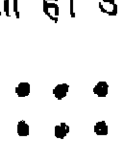
- प्रत्येक संख्या को एक रेखा के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है;

  संख्या 2 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है • •

  संख्या 3 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है • • •

  इत्यादि

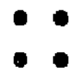
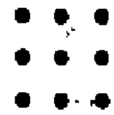
- कुछ संख्याओं को आयतों के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, संख्या 6 को आयत के रूप में दर्शाया जा सकता है।

  ध्यान दीजिए कि यहाँ दो पंक्तियाँ और 3 स्तम्भ हैं।

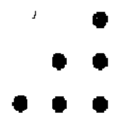
  हम पंक्तियों की संख्या को स्तम्भों की संख्या से कम लेते हैं। इसके साथ ही, आयत में एक से अधिक पंक्तियाँ होनी चाहिए।

- कुछ संख्याओं जैसे 4 और 9 को वर्गों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है;

4 ⟶  9 ⟶ 

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक वर्ग संख्या एक आयताकार संख्या भी है।

- कुछ संख्याओं को त्रिभुजों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

3 ⟶  6 ⟶ 

ध्यान दीजिए कि त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होना चाहिए और इसकी दो भुजाएँ अवश्य बराबर होनी चाहिए। नीचे से प्रारंभ करते हुए पंक्तियों में बिंदुओं की संख्या 4, 3, 2, 1 जैसी होनी चाहिए। सबसे ऊपर की पंक्ति में केवल एक बिंदु होना चाहिए।

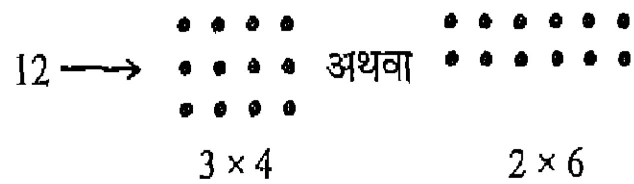
अब सारणी को पूरा कीजिए :

1, एक विशेष संख्या है।

संख्या	रेखा	आयत	वर्ग	त्रिभुज
2	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ
4	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं
5	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

प्रयास कीजिए

1. कौन सी संख्याएँ केवल रेखा के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
2. कौन सी संख्याएँ वर्गों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
3. कौन सी संख्याएँ आयतों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
4. प्रथम सात त्रिभुजाकार संख्याओं को लिखिए (अर्थात् वे संख्याएँ जिन्हें त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है) 3, 6, ...
5. कुछ संख्याओं को दो आयतों के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,



इसी प्रकार के कम से कम पाँच उदाहरण दीजिए।

प्रतिरूपों को देखना

प्रतिरूपों को देखने से आपको सरलीकरण की प्रक्रियाओं के लिए कुछ मार्गदर्शन मिल सकता है।

निम्नलिखित का अध्ययन कीजिए :

(a) $117 + 9 = 117 + 10 - 1 = 127 - 1 = 126$

(b) $117 - 9 = 117 - 10 + 1 = 107 + 1 = 108$

(c) $117 + 99 = 117 + 100 - 1 = 217 - 1 = 216$

(d) $117 - 99 = 117 - 100 + 1 = 17 + 1 = 18$

क्या यह प्रतिरूप 9, 99, 999, ... प्रकार की संख्याओं के जोड़ने या घटाने में आपकी सहायता करता है?

यहाँ एक और प्रतिरूप दिया जा रहा है :

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1)$

(b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1)$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000 - 1)$

क्या आपको किसी संख्या को 9, 99, 999, ...के प्रकार की संख्याओं से गुणा करने की एक संक्षिप्त विधि प्राप्त होती है?

ऐसी संक्षिप्त विधियाँ आपको अनेक प्रश्न मस्तिष्क में ही (मौखिक रूप से) हल करने में सहायता करती हैं।

निम्नलिखित प्रतिरूप आपको किसी संख्या को 5 या 25 या 125 से गुणा करने की एक आकर्षक विधि बताता है।

(आप इन संख्याओं को आगे भी बढ़ाने के बारे में सोच सकते हैं।)

(i) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$

(ii) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000$ ....

आगे आने वाला प्रतिरूप क्या सुझाव दे रहा है?

(i) $64 \times 5 = 64 \times \frac{10}{2} = 32 \times 10 = 320 \times 1$

(ii) $64 \times 15 = 64 \times \frac{30}{2} = 32 \times 30 = 320 \times 3$

(iii) $64 \times 25 = 64 \times \frac{50}{2} = 32 \times 50 = 320 \times 5$

(iv) $64 \times 35 = 64 \times \frac{70}{2} = 32 \times 70 = 320 \times 7$ ....

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नलिखित में से किससे शून्य निरूपित नहीं होगा?

   (a) $1 + 0$ (b) 0×0 (c) $\frac{0}{2}$ (d) $\frac{10\ \ 10}{2}$

2. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है, तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

3. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है, तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

4. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए :

(a) 728×101 (b) 5437×1001 (c) 824×25

(d) 4275×125 (e) 504×35

5. निम्नलिखित प्रतिरूप का अध्ययन कीजिए :

$1 \times 8 + 1 = 9$

$12 \times 8 + 2 = 98$

$123 \times 8 + 3 = 987$

$1234 \times 8 + 4 = 9876$

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

अगले दो चरण लिखिए। क्या आप कह सकते हैं कि प्रतिरूप किस प्रकार कार्य करता है?

(संकेत : $12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$)

हमने क्या चर्चा की?

1. संख्याएँ 1, 2, 3,... जिनका प्रयोग हम गिनने के लिए करते हैं, प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं।
2. यदि आप किसी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ते हैं तो आपको इसका परवर्ती मिलता है। यदि किसी प्राकृत संख्या में से 1 घटाते हैं, तो आपको इसका पूर्ववर्ती प्राप्त होता है।
3. प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक परवर्ती होता है। 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक पूर्ववर्ती होता है।
4. यदि प्राकृत संख्याओं के संग्रह में हम संख्या 0 जोड़ते हैं, तो हमें पूर्ण संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है। इस प्रकार संख्याएँ 0, 1, 2, 3,... पूर्ण संख्याओं का संग्रह बनाती हैं।
5. प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक परवर्ती होता है। 0 को छोड़कर प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक पूर्ववर्ती होता है।
6. सभी प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ भी हैं। लेकिन सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ नहीं हैं।
7. हम एक रेखा लेते हैं। इस पर एक बिंदु अंकित करते हैं जिसे 0 से नामांकित करते हैं। फिर हम 0 के दाईं ओर समान अंतराल (दूरी) पर बिंदु अंकित करते जाते हैं। इन्हें क्रमशः 1, 2, 3,... से नामांकित करते हैं। इस प्रकार हमें एक संख्या रेखा प्राप्त होती है जिस पर पूर्ण संख्याओं को दर्शाया जाता है। हम इस संख्या रेखा पर आसानी से संख्याओं का जोड़, व्यवकलन, गुणा और भाग जैसी संक्रियाएँ कर सकते हैं।

8. संख्या रेखा पर दाईं ओर चलने पर संगत योग प्राप्त होता है जबकि बाईं ओर चलने पर संगत व्यवकलन प्राप्त होता है। शून्य (0) से प्रारंभ करके समान दूरी के कदम से गुणा प्राप्त होता है।
9. दो पूर्ण संख्याओं का योग हमेशा एक पूर्ण संख्या ही होता है। इसी प्रकार, दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल हमेशा एक पूर्ण संख्या होता है। हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याएँ योग और गुणनफल के अंतर्गत संवृत (Closed) हैं। जबकि, पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाना) और भाग (विभाजन) के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।
10. शून्य से भाग (विभाजन) परिभाषित नहीं है।
11. शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) या (तत्समक) कहते हैं। पूर्ण संख्या 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक कहते हैं।
12. आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं। आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा (गुणन) कर सकते हैं। हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन क्रमविनिमेय (commutative) हैं।
13. पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन साहचर्य (Associative) हैं।
14. पूर्ण संख्याओं के लिए योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) होता है।
15. पूर्ण संख्याओं के क्रमविनिमेय, साहचर्य और वितरण गुण परिकलन को आसान बनाने में उपयोगी हैं और हम अनजाने में इनका प्रयोग करते हैं।
16. संख्याओं के प्रतिरूप न केवल रोचक होते हैं, बल्कि मौखिक कलन में मुख्यत: उपयोगी होते हैं और संख्याओं के गुणों को भली भांति समझने में सहायता देते हैं।

अध्याय 3

संख्याओं के साथ खेलना

3.1 भूमिका

रमेश के पास 6 कंचे (काँच की गोलियाँ) हैं। वह इन्हें पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहता है कि प्रत्येक पंक्ति में कंचों की संख्या समान हो। वह उन्हें निम्न विधियों से व्यवस्थित करता है और कंचों की कुल संख्या परिकलित करता है :

i) प्रत्येक पंक्ति में 1 कंचा।



पंक्तियों की संख्या = 6

कंचों की कुल संख्या = $1 \times 6 = 6$

ii) प्रत्येक पंक्ति में 2 कंचे।



पंक्तियों की संख्या = 3

कंचों की कुल संख्या = $2 \times 3 = 6$

iii) प्रत्येक पंक्ति में 3 कंचे।



पंक्तियों की संख्या = 2

कंचों की कुल संख्या = $3 \times 2 = 6$

iv) वह कोई ऐसी व्यवस्था नहीं सोच सका जिसमें प्रत्येक पंक्ति में 4 कंचे अथवा 5 कंचे हों। इसलिए अब केवल एक व्यवस्था बची, जिसमें एक पंक्ति में सभी 6 कंचों को रख दिया जाए।

पंक्तियों की संख्या = 1
कंचों की कुल संख्या = $6 \times 1 = 6$

इन परिकलनों में रमेश यह देखता है कि 6 को विभिन्न प्रकार (विधियों) से दो संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखा जा सकता है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$6 = 1 \times 6$; $6 = 2 \times 3$; $6 = 3 \times 2$; $6 = 6 \times 1$

$6 = 2 \times 3$ से यह कहा जा सकता है कि 2 और 3, संख्या 6 को पूरी-पूरी (exactly) विभाजित करती हैं। अर्थात् 2 और 3, संख्या 6 के पूरे-पूरे विभाजक (या भाजक) (divisors) हैं। अन्य गुणनफल $6 = 1 \times 6$ से 6 के अन्य विभाजक 1 और 6 प्राप्त होते हैं।

इस प्रकार, 1, 2, 3 और 6 संख्या 6 के विभाजक हैं। ये 6 के *गुणनखंड* (factors) कहलाते हैं।

18 कंचों को पंक्तियों में व्यवस्थित करने का प्रयत्न कीजिए और 18 के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

4.2 गुणनखंड और गुणज

मैरी वे संख्याएँ ज्ञात करना चाहती है जो 4 को पूरी-पूरी विभाजित करती हैं। वह 4 को 4 से कम या उसके बराबर की संख्याओं से इस प्रकार विभाजित करती (भाग देती) है;

1) 4 (4	2) 4 (2	3) 4 (1
−4	−4	−3
0	0	1
भागफल 4 है	*भागफल 2 है*	*भागफल 1 है*
शेषफल या शेष 0 है	*शेष 0 है*	*शेष 1 है*
$4 = 1 \times 4$	$4 = 2 \times 2$	

4) 4 (1
$\underline{-4}$
0

4 = 4 × 1

भागफल 1 है

शेष 0 है

वह पाती है कि संख्या 4 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

4 = 1 × 4; 4 = 2 × 2; 4 = 4 × 1

वह ज्ञात करती है कि 1, 2 और 4 संख्या 4 के पूरे-पूरे विभाजक हैं।

ये संख्याएँ 4 के गुणनखंड कहलाती हैं।

किसी संख्या का गुणनखंड उसका एक पूरा-पूरा (exact) विभाजक (divisor) होता है।

ध्यान दीजिए कि 4 का प्रत्येक गुणनखंड 4 से कम या उसके बराबर है।

खेल 1 : यह खेल दो व्यक्तियों, मान लीजिए A और B द्वारा खेला जा सकता है। यह खेल गुणनखंड ज्ञात करने के बारे में है।

इसके लिए 42 कार्डों की आवश्यकता है, जिन पर 1 से 42 तक की संख्याएँ अंकित हैं।

एक मेज़ पर इन कार्डों को नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए :

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42

चरण :

(a) निर्णय लीजिए कि पहले कौन खेलेगा : A या B।

(b) मान लीजिए A पहले खेलता है। वह मेज से एक कार्ड उठाता है और अपने निकट रख लेता है। मान लीजिए इस कार्ड पर 28 लिखा है।

(c) खिलाड़ी B अब वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर A के कार्ड पर लिखी संख्या (अर्थात् 28) के गुणनखंड लिखे हैं और उन्हें अपने निकट एक ढेर में रख देता है।

(d) फिर खिलाड़ी B मेज पर रखे कार्डों में से एक कार्ड उठाता है। अब मेज पर बचे कार्डों से A वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर B के कार्ड की संख्या के गुणनखंड लिखे हैं।

(e) यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि सभी कार्ड न उठा लिए जाएँ।

(f) A अपने पास रखे कार्डों की संख्याओं को जोड़ता है और B भी अपने पास रखें कार्डों की संख्याओं को जोड़ता है। जिस खिलाड़ी का योग अधिक होगा उसे ही जीता हुआ माना जाएगा।

कार्डों की संख्या को बढ़ाकर इस खेल को और अधिक रोचक बनाया जा सकता है।

इस खेल को अपने मित्र के साथ खेलिए। क्या आप इस खेल को जीतने की कोई विधि ज्ञात कर सकते हैं?

जब हम $20 = 4 \times 5$ लिखते हैं, तो हम कहते हैं कि 4 और 5, संख्या 20 के गुणनखंड (factor) हैं। हम यह भी कहते हैं कि 20, संख्या 4 और 5 का गुणज (multiple) है।

गुणज ↑
$4 \times 5 = 20$
↓ ↓
गुणनखंड गुणनखंड

निरूपण $24 = 2 \times 12$ यह दर्शाता है कि 2 और 12, संख्या 24 के गुणनखंड हैं तथा 24 संख्या 2 और 12 का एक गुणज है।

हम कह सकते हैं कि एक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखंड का एक गुणज होती है।

प्रयास कीजिए

45, 30 और 36 के संभावित गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

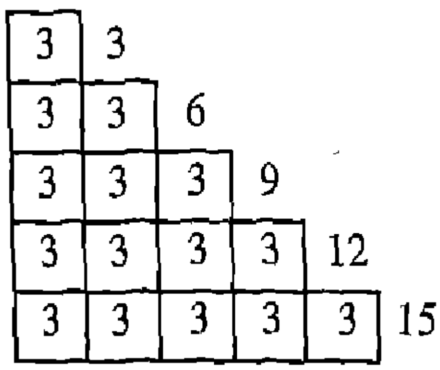
आइए अब गुणनखंडों और गुणजों के बारे में कुछ रोचक तथ्यों को देखें :

(a) लकड़ी या कागज़ की कुछ पट्टियाँ एकत्रित कीजिए, जिनमें से प्रत्येक की लंबाई 3 मात्रक हो।

(b) सिरे से सिरा मिला कर इन्हें नीचे दी आकृति के अनुसार जोड़िए :

ऊपरी पट्टी की लंबाई $3 = 1 \times 3$ मात्रक है।

इसके नीचे वाली पट्टी की लंबाई $3 + 3 = 6$ मात्रक (units) है। साथ ही,



$6 = 2 \times 3$ है। अगली पट्टी की लंबाई $3 + 3 + 3 = 9$ मात्रक है। साथ ही, $9 = 3 \times 3$ है। इस प्रक्रिया को जारी रखते हुए, हम अन्य लंबाइयों को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं:

$12 = 4 \times 3$; $15 = 5 \times 3$

हम कहते हैं कि संख्याएँ 3, 6, 9, 12, 15 संख्या 3 के गुणज हैं।

3 के गुणजों की सूची को 18, 21, 24, ... के रूप में आगे बढ़ाया जा सकता है। इनमें से प्रत्येक गुणज 3 से बड़ा या उसके बराबर है।

संख्या 4 के गुणज 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...हैं। यह सूची समाप्त नहीं होती है। इनमें से प्रत्येक गुणज 4 से बड़ा या उसके बराबर है।

आइए देखें कि गुणनखंडों और गुणजों के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

1. क्या कोई ऐसी संख्या है, जो प्रत्येक संख्या के गुणनखंड के रूप में आती है? हाँ, यह संख्या 1 है। उदाहरणार्थ, $6 = 1 \times 6, 18 = 1 \times 18$ इत्यादि। इसकी जाँच कुछ और संख्याएँ लेकर कीजिए।

   अतः, हम कहते हैं कि 1 **प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है।**

2. क्या 7 स्वयं का एक गुणनखंड हो सकता है? हाँ। आप 7 को 7×1 के रूप में लिख सकते हैं। 10 के बारे में आप क्या कह सकते हैं? 15 के बारे में आप क्या सोचते हैं? आप देख सकते हैं कि प्रत्येक संख्या को आप इस रूप में लिख सकते हैं।

   हम कहते हैं कि **प्रत्येक संख्या स्वयं अपना एक गुणनखंड होती है।**

3. 16 के गुणनखंड क्या हैं? ये 1, 2, 4, 8 और 16 हैं। इन गुणनखंडों में क्या आप कोई ऐसा गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं, जो 16 को विभाजित न करता हो? 20 और 36 के लिए भी उपरोक्त कथन की जाँच करिए।

   आप पाएँगे कि **एक संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या का एक पूर्ण विभाजक होता है।**

4. 34 के गुणनखंड क्या हैं? ये 1, 2, 17 और स्वयं 34 हैं। इनमें सबसे बड़ा गुणनखंड कौन सा है? यह 34 है। अन्य गुणनखंड 1, 2 और 17 संख्या 34 से छोटे हैं। 64, 81 और 56 के लिए भी इस कथन की जाँच कीजिए। हम कहते हैं कि **एक दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।**

5. 76 के गुणनखंडों की संख्या ज्ञात कीजिए। इसके 5 गुणनखंड हैं। 136 के कितने गुणनखंड हैं? 96 के कितने गुणनखंड हैं? आप पाएँगे कि आप इनमें से प्रत्येक संख्या के गुणनखंडों की संख्याओं को गिन सकते हैं। संख्याएँ 10576, 25642 इत्यादि जैसी बड़ी होने पर भी आप इन संख्याओं के गुणनखंडों को गिन सकते हैं, यद्यपि आपको इन संख्याओं को गुणनखंडित करने में कुछ कठिनाई अवश्य होगी।

हम कह सकते हैं कि **एक दी हुई संख्या के गुणनखंडों की संख्या परिमित (finite) होती है।**

6. 7 के गुणज क्या हैं? स्पष्टत: ये 7, 14, 21, 28,... हैं। आप पाएँगे कि इनमें से प्रत्येक 7 से बड़ा या उसके बराबर है। क्या यह प्रत्येक संख्या के गुणजों के लिए सत्य होगा? इसकी जाँच 6, 9 ओर 10 के गुणजों को लेकर कीजिए।

   हम पाते हैं कि **एक संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।**

7. 5 के गुणज लिखिए। ये 5, 10, 15, 20, ... हैं। क्या आप सोचते हैं कि यह सूची कहीं समाप्त होगी? नहीं। यह सूची समाप्त न होने वाली है। इसकी जाँच 6, 7 इत्यादि के गुणजों को लेकर भी कीजिए।

   हम प्राप्त करते हैं कि **एक दी हुई संख्या के गुणजों की संख्या अपरिमित (infinite) है।**

8. क्या 7 स्वयं का एक गुणज है। हाँ, क्योंकि $7 = 7 \times 1$ है। क्या यह अन्य संख्याओं के लिए भी सत्य है? 3, 12 और 16 के लिए इसकी जाँच कीजिए।

   आप पाएँगे कि **प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।**

6 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3 और 6 हैं। साथ ही, $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$ है। हम प्राप्त करते हैं कि 6 के सभी गुणनखंड़ों का योग 6 का दो गुना है। 28 के सभी गुणनखंड 1, 2, 4, 7, 14 और 28 हैं। इन्हें जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$ है।

अर्थात् 28 के सभी गुणनखंडों का योग संख्या 28 का दो गुना है।

वह संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योग उस संख्या का दो गुना हो, एक संपूर्ण संख्या (perfect number) कहलाती है। 6 और 28 संपूर्ण संख्याएँ हैं।

क्या 10 एक संपूर्ण संख्या है?

उदाहरण 1 68 के सभी गुणनखंडों को लिखिए।

हल हम देखते हैं कि

$68 = 1 \times 68$ $68 = 2 \times 34$ $68 = 4 \times 17$

$68 = 17 \times 4$

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि 4 और 17 पहले आ चुके हैं।

इस प्रकार, 68 के सभी गुणनखंड 1, 2, 4, 17, 34 और 68 हैं।

उदाहरण 2 36 के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल $36 = 1 \times 36$ $36 = 2 \times 18$

$36 = 3 \times 12$ $36 = 4 \times 9$

$36 = 6 \times 6$

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि दोनों गुणनखंड (6) समान हैं।

इस प्रकार, वाँछित गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 और 36 हैं।

उदाहरण 3 6 के सभी प्रथम पाँच गुणज लिखिए।

हल वाँछित गुणज :

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$ और $6 \times 5 = 30$

अर्थात् 6, 12, 18, 24 और 30 हैं।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी गुणनखंड लिखिए :

(a) 24 (b) 15 (c) 21

(d) 27 (e) 12 (f) 20

(g) 18 (h) 23 (i) 36

2. निम्न संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए :

(a) 5 (b) 8 (c) 9

3. स्तम्भ 1 की संख्याओं का स्तंभ 2 के साथ मिलान कीजिए :

स्तंभ 1	**स्तंभ 2**
(i) 35	(a) 8 का गुणज
(ii) 15	(b) 7 का गुणज
(iii) 16	(c) 70 का गुणज
(iv) 20	(d) 30 का गुणनखंड
(v) 25	(e) 50 का गुणनखंड
	(f) 20 का गुणनखंड

4. 9 के सभी गुणज ज्ञात कीजिए जो 100 से कम हों।

3.3 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ

अब हम किसी संख्या के गुणनखंड करने की विधि से परिचित हो चुके हैं। निम्न सारणी में लिखी कुछ संख्याओं के गुणनखंडों की संख्याओं पर ध्यान दीजिए :

संख्या	गुणनखंड	गुणनखंडों की संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

हम देखते हैं कि (a) संख्या 1 का एक ही गुणनखंड (स्वयं वही संख्या) है।

(b) कुछ संख्याएँ जैसे 2, 3, 5, 7, 11 इत्यादि ऐसी हैं जिनके ठीक दो गुणनखंड (1 और स्वयं वह संख्या) हैं। ये संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ (prime numbers) हैं। **वे संख्याएं जिनके गुणनखंड 1 और स्वयं वह संख्या ही होते हैं अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।**

इन संख्याओं के अतिरिक्त कुछ अन्य अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

(c) कुछ संख्याएँ जैसे 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादि ऐसी हैं, जिनके दो से अधिक गुणनखंड हैं, ये संख्याएँ *भाज्य संख्याएँ* (composite numbers) हैं। **वे संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।**

क्या 15 एक भाज्य संख्या है? 18 और 25 के बारे में आप क्या सोचते हैं?

ध्यान रखें : 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या

हम एक सरल विधि से 1 से 100 तक के बीच की अभाज्य संख्याएँ बिना उनके गुणनखंड किए ज्ञात करते हैं। यह विधि ई.पूर्व तीसरी शताब्दी में एक यूनानी गणितज्ञ इराटोसथीन्स (Eratosthenes) ने दी थी। आइए इस विधि को देखें। 1 से 100 तक की संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चरण-1 : 1 को काट दीजिए, क्योंकि यह एक अभाज्य संख्या नहीं है।

चरण-2 : 2 पर घेरा लगाइए और 2 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों, जैसे 4, 6, 8, इत्यादि को काट दीजिए।

चरण-3 : आप पाएँगे कि अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर घेरा लगाइए और 3 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण-4 : अगली बिना कटी संख्या 5 है। 5 पर घेरा लगाइए और 5 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण-5 : इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक कि उपरोक्त सूची में दी हुई संख्याओं पर या तो घेरा न लग जाए या वे काट न दी जाएँ। घेरा लगी हुई सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 के अतिरिक्त सभी काटी गई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं। यह विधि इराटोसथीन्स की छलनी (Sieve of Eratosthenes) विधि कहलाती है।

प्रयास कीजिए

ध्यान दीजिए कि $2 \times 3 + 1 = 7$ एक अभाज्य संख्या है। यहाँ 2 के एक गुणज में 1 जोड़ कर एक अभाज्य संख्या प्राप्त की गई है। क्या आप इस प्रकार से कुछ और अभाज्य संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 4 :15 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ लिखिए।

हल :छलनी विधि से प्राप्त उपरोक्त सारणी को देखकर, हम सरलता से वाँछित अभाज्य संख्याएँ लिख सकते हैं। ये हैं : 2, 3, 5, 7, 11 और 13

3 सम और विषम संख्याएँ

क्या आप संख्याओं 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... में कोई प्रतिरूप (pattern) देखते हैं? आप पाएँगे कि इनमें से प्रत्येक 2 का एक गुणज है।

ये संख्याएँ *सम* **संख्याएँ (even numbers)** कहलाती हैं। शेष बची सभी प्राकृत संख्याएँ 1, 3, 5, 7, 9, 11,... **विषम संख्याएँ (odd numbers)** कहलाती हैं।

आप आसानी से जाँच कर सकते हैं कि एक 2 या 3 अंकों वाली संख्या सम संख्या है या नहीं। आप यह कैसे ज्ञात करेंगे कि 756482 जैसी बड़ी संख्या एक सम संख्या है या नहीं? क्या 2 से भाग देकर? क्या यह प्रक्रिया जटिल नहीं होगी?

हम कहते हैं कि वह संख्या जिसके इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 अंक हों एक *सम संख्या* होगी। इसलिए संख्याएँ 350, 4862 और 59246 सम संख्याएँ हैं। संख्याएँ 457, 2359 और 8231 विषम संख्याएँ हैं। आइए अब कुछ रोचक तथ्यों को ज्ञात करने का प्रयत्न करें :

(a) सबसे छोटी सम संख्या कौन-सी है? यह 2 है। सबसे छोटी अभाज्य संख्या कौन-सी है? पुनः यह संख्या 2 है।

इस प्रकार, **2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है।**

(b) 2 के अतिरिक्त अभाज्य संख्याएँ 3, 5, 7, 11, ... हैं। क्या आप इस सूची में कोई सम संख्या देख रहे हैं? नहीं! सभी संख्याएँ विषम हैं। कुछ और अभाज्य संख्याएँ देखने का प्रयत्न करें।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि **2 के अतिरिक्त सभी अभाज्य संख्याएँ, विषम हैं।**

प्रश्नावली 3.2

1. बताइए कि किन्हीं दो संख्याओं का योग सम होता है या विषम होता है, यदि वे दोनों
   (a) विषम संख्याएँ हों (b) सम संख्याएँ हों
2. बताइए कि निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है और कौन सा असत्य :
   (a) तीन विषम संख्याओं का योग सम होता है।
   (b) दो विषम संख्याओं और एक सम संख्या का योग सम होता है।
   (c) तीन विषम संख्याओं का गुणनफल विषम होता है।
   (d) यदि किसी सम संख्या को 2 से भाग दिया जाए, तो भागफल सदैव विषम होता है।
   (e) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम हैं।
   (f) अभाज्य संख्याओं के कोई गुणनखंड नहीं होते।

(g) दो अभाज्य संख्याओं का योग सदैव सम होता है।

(h) केवल 2 ही एक सम अभाज्य संख्या है।

(i) सभी सम संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।

(j) दो सम संख्याओं का गुणनफल सदैव सम होता है।

3. संख्या 13 और 31 अभाज्य संख्याएँ हैं। इन दोनों संख्याओं में दो अंक 1 और 3 हैं। 100 तक की संख्याओं में ऐसे अन्य सभी युग्म ज्ञात कीजिए।
4. 20 से छोटी सभी अभाज्य और भाज्य संख्याएँ अलग-अलग लिखिए।
5. 1 और 10 के बीच में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या लिखिए।
6. निम्नलिखित को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (a) 44 (b) 36 (c) 24 (d) 18
7. अभाज्य संख्याओं के ऐसे तीन युग्म लिखिए जिनका अंतर 2 हो।

   [टिप्पणी : दो अभाज्य संख्याएँ जिनका अंतर 2 हो **अभाज्य युग्म (twin primes)** कहलाती हैं।]
8. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं?

   (a) 23 (b) 51 (c) 37 (d) 26
9. 100 से छोटी सात क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए जिनके बीच में कोई अभाज्य संख्या नहीं हो।
10. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को तीन अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कीजिए:

    (a) 21 (b) 31 (c) 53 (d) 61
11. 20 से छोटी अभाज्य संख्याओं के ऐसे पाँच युग्म लिखिए जिनका योग 5 से विभाज्य (divisible) हो। (संकेत : $3 + 7 = 10$)
12. निम्न में रिक्त स्थानों को भरिए :

    (a) वह संख्या जिसके केवल दो गुणनखंड हों एक ______ कहलाती है।

    (b) वह संख्या जिसके दो से अधिक गुणनखंड हों एक ______ कहलाती है।

    (c) 1 न तो ______ है और न ही ______ ।

    (d) सबसे छोटी अभाज्य संख्या ______ है।

    (e) सबसे छोटी भाज्य संख्या _____ है।

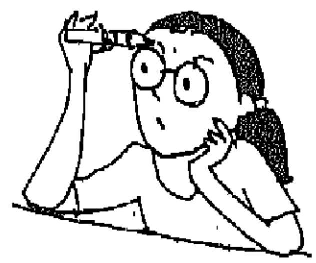
    (f) सबसे छोटी सम संख्या ______ है।

3.4 संख्याओं की विभाज्यता की जाँच

क्या संख्या 38 संख्या 2 से विभाज्य है? क्या यह 4 से विभाज्य है? क्या यह 5 से विभाज्य है?

38 को वास्तविक रूप में इन संख्याओं से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं कि यह 2 से विभाज्य है, परन्तु 4 और 5 से विभाज्य नहीं है।

आइए देखें कि क्या हम कोई प्रतिरूप (पैटर्न) ज्ञात कर सकते हैं जिससे हम बता सकें कि कोई संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 या 11 से विभाज्य है या नहीं। क्या आप सोचते हैं कि ऐसे प्रतिरूप हम आसानी से देख सकते हैं?



10 से विभाज्यता : चारू 10 के गुणजों 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... को देख रही थी। उसने इन संख्याओं में एक सर्वनिष्ठ (common) गुण देखा। क्या आप बता सकते हैं कि क्या इनमें प्रत्येक के इकाई के स्थान पर अंक 0 है?

उसने इकाई के स्थान 0 वाली कुछ और संख्याओं के बारे में भी सोचा, जैसे कि 100, 1000, 3200, 7010। उसने यह भी ज्ञात किया कि ये सभी संख्याएँ 10 से विभाज्य हैं।

इस प्रकार, वह ज्ञात करती है कि **यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर अंक 0 हो, तो वह 10 से विभाज्य होती है।**

5 से विभाज्यता : मनि ने संख्याओं 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... में एक रोचक प्रतिरूप प्राप्त किया। क्या आप यह प्रतिरूप बता सकते हैं? इन सभी संख्याओं में, इकाई के स्थान पर या तो अंक 0 है या अंक 5 है। उसने ज्ञात किया कि ये सभी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं।

उसने 5 से विभाज्य कुछ और संख्याएँ लीं, जैसे कि 105, 215, 6205, 3500 इत्यादि। इन संख्याओं में भी इकाई के स्थान पर 0 या 5 ही आते हैं।

उसने 23, 56 और 97 को 5 से भाग देने का प्रयत्न किया। क्या वह ऐसा करने में समर्थ हो जाएगा? इसकी जाँच कीजिए। वह देखता है कि **यदि किसी संख्या**

का इकाई का अंक 0 हो या 5 हो, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है।

क्या 1750125 संख्या 5 से विभाज्य है?

2 से विभाज्यता: चारू 2 के कुछ गुणजों 10, 12, 14, 16, ... और कुछ अन्य गुणजों जैसे 2410, 4356, 1358, 2972, 5974 को देखती है। उसे इनमें एक प्रतिरूप दिखाई देता है। क्या आप इस प्रतिरूप को बता सकते हैं? इन संख्याओं के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 और 8 में से ही कोई अंक आता है।

वह इन संख्याओं को 2 से भाग देती है और शेष 0 प्राप्त करती है।

वह यह भी ज्ञात करती है कि संख्याएँ 2467 और 4829 संख्या 2 से विभाज्य नहीं है। इन संख्याओं के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई भी अंक नहीं है।

इन प्रेक्षणों से वह यह निष्कर्ष निकालती है कि **यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई अंक हो, तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।**

3 से विभाज्यता: क्या संख्या 21, 27, 36, 54 और 219 संख्या 3 से विभाज्य हैं? हाँ, ये हैं।

क्या संख्याएँ 25, 37 और 260 संख्या 3 से विभाज्य हैं? नहीं।

3 से विभाज्यता के लिए क्या आप कोई प्रतिरूप इकाई स्थान में देख सकते हैं हम नहीं देख सकते, क्योंकि इकाई के स्थान पर समान अंक होने पर वह 3 से विभाजित हो भी सकता है और नहीं भी।

जैसे संख्या 27, 3 से विभाजित है, पर संख्याएँ 17, 37, 3 से विभाजित नहीं है।

अब आप 21, 36, 54 और 219 के अंकों को जोड़िए। क्या आप इनमें कोई विशेष बात देखते हैं? $2 + 1 = 3$, $3 + 6 = 9$, $5 + 4 = 9$, $2 + 1 + 9 = 12$। ये सभी योग 3 से विभाज्य हैं।

25, 37, 260 के अंकों को जोड़िए। हमें $2 + 5 = 7$, $3 + 7 = 10$, $2 + 6 + 0 = 8$ प्राप्त होता है। इनमें से कोई भी योग 3 से विभाज्य नहीं है।

हम कहते हैं कि **यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 का एक गुणज हो, तो वह संख्या 3 से विभाज्य होती है।**

क्या 7221 संख्या 3 से विभाज्य है?

6 से विभाज्यता: क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं जो 2 और 3 दोनों से विभाज्य है? ऐसी एक संख्या 18 है। क्या संख्या 18, 2×3 के गुणनफल 6 से विभाज्य होगी? हाँ, ऐसा ही है।

18 जैसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि क्या वे 6 से भी विभाज्य हैं।



क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं जो 2 से विभाज्य हो, परंतु 3 से विभाज्य न हो?

अब एक ऐसी संख्या लिखिए जो 3 से विभाज्य हो, परंतु 2 से विभाज्य न हो। ऐसी एक संख्या 27 है।

क्या 27 संख्या 6 से विभाज्य है? नहीं। ऐसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

इन प्रेक्षणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो, तो वह संख्या 6 से भी विभाज्य होती है।**

4 से विभाज्यता: क्या आप तीन अंकों की कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जो 4 से विभाज्य है? हाँ, ऐसी एक संख्या 212 है। अब कोई चार अंकों की संख्या बताओ जो 4 से विभाज्य हो। ऐसी एक संख्या 1936 है।

212 के इकाई और दहाई के स्थानों के अंकों से बनी संख्या को देखिए। यह संख्या 12 है, जो 4 से विभाज्य है। 1936 के लिए यह संख्या 36 है। पुनः यह संख्या भी 4 से विभाज्य है। इसी प्रक्रिया को संख्या 4612; 3516; 9532 पर करने का प्रयत्न कीजिए।

क्या 286 संख्या 4 से विभाज्य है? नहीं। क्या 86 संख्या 4 से विभाज्य है? नहीं।

अतः, हम कहते हैं कि **3 या अधिक अंकों की एक संख्या 4 से विभाज्य**

होती है, यदि उसके अंतिम दो अंकों (इकाई और दहाई के स्थान के अंकों) से बनी संख्या 4 से विभाज्य हो। इस नियम की जाँच 10 और उदाहरण लेकर कीजिए।

1 या 2 अंकों की संख्या की 4 से विभाज्यता की जाँच वास्तविक रूप में 4 से भाग देकर की जानी चाहिए।

8 से विभाज्यता : क्या संख्याएँ 1000, 2104 और 1416 संख्या 8 से विभाज्य हैं? हाँ, ये 8 से विभाज्य हैं।

इन संख्याओं के इकाई, दहाई और सैंकड़े के अंकों से बनी संख्याएँ क्रमश: 000, 104 और 416 हैं। ये तीनों संख्याएँ भी 8 से विभाज्य हैं। ऐसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके इकाई, दहाई और सैंकड़े के स्थानों के अंकों (अंतिम तीन अंक) से बनी संख्याएँ 8 से विभाज्य हों। उदाहरणार्थ 9216, 8216, 7216, 10216, 9995216 इत्यादि। इन संख्याओं में आप पाएँगे कि ये संख्याएँ स्वयं भी 8 से विभाज्य हैं।

हम ज्ञात करते हैं कि **4 या उससे अधिक अंकों की कोई संख्या 8 से विभाज्य होती है, यदि अंतिम तीन अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो।**

क्या 73512 संख्या 8 से विभाज्य है?

1, 2 या 3 अंकों वाली संख्याओं की 8 से विभाज्यता की जाँच वास्तविक रूप से भाग देकर की जा सकती है।

9 से विभाज्यता : 9 के गुणज 9, 18, 27, 36, 45, 54,.... हैं अर्थात् ये संख्याएँ 9 से विभाज्य हैं। कुछ अन्य संख्याएँ 4608 और 5283 भी हैं जो 9 से विभाज्य हैं।

क्या आप इन संख्याओं के अंकों के योग में कोई प्रतिरूप देखते हैं? हाँ।

$1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9,$

$4 + 6 + 0 + 8 = 18, 5 + 2 + 8 + 3 = 18$

इनमें सभी योग 9 से विभाज्य हैं।

क्या 758 संख्या 9 से विभाज्य है? नहीं।

इस संख्या के अंकों का योग $7 + 5 + 8 = 20$ भी 9 से विभाज्य नहीं है।

इन प्रेक्षणों के आधार पर, हम कह सकते हैं कि **यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य हो, तो वह संख्या भी 9 से विभाज्य होती है।**

11 से विभाज्यता: संख्याओं 308, 1331 और 61809 में से प्रत्येक संख्या 11 से विभाज्य है।

हम एक सारणी बनाते हैं और देखते हैं कि क्या इन संख्याओं के अंकों से हमें कोई प्रतिरूप प्राप्त होता है।

संख्या	दाएँ से विषम स्थानों के अंकों का योग	दाएँ से सम स्थानों के अंकों का योग	अंतर
308	8 + 3 = 11	0	11 – 0 = 11
1331	1 + 3 = 4	3 + 1 = 4	4 – 4 = 0
61809	9 + 8 + 6 = 23	0 + 1 = 1	23 – 1 = 22

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर या तो 0 है या 11 से विभाज्य है। साथ ही, ये सभी संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं।

संख्या 5081 के लिए, ऐसे अंकों का अंतर (8 + 5) – (1 + 0) = 12 है, जो 11 से विभाज्य नहीं है। संख्या 5081 भी 11 से विभाज्य नहीं है। इसकी जाँच 11 से 5081 को भाग देकर की जा सकती है।

इस प्रकार, **किसी संख्या की 11 से विभाज्यता की जाँच के लिए, दाएँ से विषम स्थानों के अंकों का योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर ज्ञात किया जाए। यदि यह अंतर 0 है या 11 से विभाज्य है, तो वह संख्या 11 से विभाज्य होती है।**

प्रश्नावली 3.3

1. विभाज्यता की जाँच के नियमों का प्रयोग करते हुए, पता कीजिए कि निम्नलिखित संख्याओं में से कौन सी संख्याएँ 2 से विभाज्य हैं; 3 से विभाज्य हैं; 4 से विभाज्य हैं; 5 से विभाज्य हैं, 6 से विभाज्य हैं, 8 से विभाज्य हैं, 9 से विभाज्य हैं, 10 से विभाज्य हैं या 11 से विभाज्य हैं (हाँ या नहीं कहिए) :

संख्या	विभाज्य है								
	2 से	**3 से**	**4 से**	**5 से**	**6 से**	**8 से**	**9 से**	**10 से**	**11 से**
128	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
990	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1586	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
275	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6686	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
639210	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
429714	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2856	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3060	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
406839	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2. विभाज्यता की जाँच के नियमों द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं और कौन सी 8 से विभाज्य हैं:

   (a) 572 (b) 726352 (c) 5500 (d) 6000
   (e) 12159 (f) 14560 (g) 21084 (h) 31795072
   (i) 1700 (j) 2150

3. विभाज्यता की जाँच के नियमों द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 6 से विभाज्य हैं :

   (a) 297144 (b) 1258 (c) 4335 (d) 61233
   (e) 901352 (f) 438750 (g) 1790184 (h) 12583
   (i) 639210 (j) 17852

4. विभाज्यता की जाँच के नियमों द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं :

   (a) 5445 (b) 10824 (c) 7138965
   (d) 70169308 (e) 10000001 (f) 901153

5. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों में सबसे छोटा अंक तथा सबसे बड़ा अंक लिखिए, जिससे संख्या 3 से विभाज्य हो;

   (a) ____ 6724 (b) 4765 ____ 2

6. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों में ऐसा अंक लिखिए ताकि संख्या 11 से विभाज्य हो:

   (a) 92 ____ 389 (b) 8 ____ 9484

3.8 सार्व गुणनखंड और सार्व गुणज

कुछ संख्याओं के युग्मों के गुणनखंडों को देखिए।

(a) 4 और 18 के गुणनखंड क्या हैं?

4 के गुणनखंड हैं : 1, 2 और 4

18 के गुणनखंड हैं : 1, 2, 3, 6, 9 और 18

दोनों संख्याओं 4 और 18 के गुणनखंड 1 और 2 हैं।

अथवा ये 4 और 18 के उभयनिष्ठ या सार्व गुणनखंड (Common factors) हैं।

प्रयास कीजिए

निम्न युग्मों के उभयनिष्ठ या सार्व गुणनखंड क्या हैं?

(a) 8, 20 (b) 9, 15

(b) 4 और 15 के सार्व गुणनखंड क्या हैं?

इन दोनों संख्याओं में केवल 1 ही सार्व गुणनखंड हैं।

7 और 16 के सार्व गुणनखंड क्या हैं?

दो संख्याएँ जिनमें केवल 1 ही सार्व गुणनखंड होता है सह-अभाज्य संख्याएँ (co-prime numbers) कहलाती हैं। 4 और 15 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

क्या 7 और 15, 12 और 49, 18 और 23 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं?

(c) क्या हम 4, 12 और 16 के सार्व गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं?

4 के गुणनखंड 1, 2 और 4 हैं।

12 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6 और 12 हैं।

16 के गुणनखंड 1, 2, 4, 8 और 16 हैं।

स्पष्टत: 4, 12 और 16 के सार्व गुणनखंड 1, 2 और 4 हैं।

निम्न के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(a) 8, 12, 20 (b) 9, 15, 21

आइए अब एक से अधिक संख्याओं के गुणजों को एक साथ लेकर देखें।

(a) 4 और 6 के गुणज क्या हैं?

4 के गुणज हैं : 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... (कुछ और गुणज लिखिए)

6 के गुणज हैं : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... (कुछ और गुणज लिखिए)

इनमें से, क्या कुछ और ऐसी संख्याएँ हैं जो दोनों सूचियों में आ रही हैं? हम देखते हैं कि 12, 24, 36, ... 4 और 6 दोनों के गुणज हैं।

क्या आप ऐसे कुछ और गुणज लिख सकते हैं?

ये 4 और 6 के उभयनिष्ठ या सार्व गुणज (Common multiples) कहलाते हैं?

(b) 3, 5 और 6 के सार्व गुणज ज्ञात कीजिए।

3 के गुणज 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ... हैं।

5 के गुणज 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... हैं।

6 के गुणज 6, 12, 18, 24, 30, ... है।

3, 5 और 6 के, सार्व गुणज 30, 60, 90, ... हैं।

3, 5 और 6 के कुछ और सार्व गुणज लिखिए।

[illegible] : 75, 60 और 210 के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

[illegible] : 75 के गुणनखंड 1, 3, 5, 15, 25 और 75 हैं।

60 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 और 60 हैं।

210 के गुणनखंड 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 और 210 हैं।

इस प्रकार 75, 60 और 210 के सार्व गुणनखंड 1, 3, 5 और 15 हैं।

[illegible] : 3, 4 और 9 के सार्व गुणज ज्ञात कीजिए।

[illegible] : 3 के गुणज 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, ... हैं।

4 के गुणज 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,... हैं।

9 के गुणज 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ... हैं।

स्पष्टत: 3, 4 और 9 के सार्व गुणज 36, 72, 108,... हैं।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्न के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए:
   (a) 20 और 28 (b) 15 और 25
   (c) 35 और 50 (d) 56 और 120
2. निम्न के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए:
   (a) 4, 8 और 12 (b) 5, 15 और 25
3. निम्न के प्रथम तीन सार्व गुणज ज्ञात कीजिए:
   (a) 6 और 8 (b) 12 और 18
4. 100 से छोटी ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए जो 3 और 4 के सार्व गुणज हैं।
5. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ सह-अभाज्य हैं?
   (a) 18 और 35 (b) 15 और 37 (c) 30 और 415
   (d) 17 और 68 (e) 216 और 215 (f) 81 और 16
6. एक संख्या 5 और 12 दोनों से विभाज्य है। किस अन्य संख्या से यह संख्या सदैव विभाजित होगी?
7. एक संख्या 12 से विभाज्य है। और कौन सी संख्याएँ हैं जिनसे यह संख्या विभाज्य होगी?

3.6 विभाज्यता के कुछ और नियम

आइए संख्याओं की विभाज्यता के कुछ और नियमों को देखें।

(i) क्या आप 18 का एक गुणनखंड बता सकते हैं? यह 9 है। 9 के एक गुणनखंड को लिखिए। यह 3 है। क्या संख्या 18 का एक गुणनखंड 3 है। हाँ, यह है। 18 का कोई अन्य गुणनखंड बताइए। यह 6 है। 6 का एक गुणनखंड बताइए। यह 2 है। यह 18 का भी एक गुणनखंड है, अर्थात् 18 को विभाजित करता है। इसकी जाँच 18 के अन्य गुणनखंडों के लिए भी कीजिए।

यही प्रक्रिया 24 के लिए भी कीजिए। यह 8 से विभाज्य है। साथ ही, 24 संख्या 8 के सभी गुणनखंडों 1,2,4 और 8 से भी विभाज्य है।

इसलिए, हम कह सकते हैं कि **यदि कोई संख्या एक संख्या से विभाज्य है, तो वह संख्या इस संख्या के प्रत्येक गुणनखंड से भी विभाज्य होगी।**

(ii) संख्या 80 संख्याओं 4 और 5 दोनों से विभाज्य है। यह $4 \times 5 = 20$ से भी विभाज्य है तथा 4 और 5 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार, 60 सह-अभाज्य संख्याओं 3 और 5 से विभाज्य है। 60, गुणनफल $3 \times 5 = 15$ से भी विभाज्य है।

इसलिए, हम कह सकते हैं कि **यदि कोई संख्या दो सह-अभाज्य संख्याओं से विभाज्य हो, तो वह उनके गुणनफल से भी विभाज्य होती है।**

(iii) दोनों संख्याएँ 16 और 20 संख्या 4 से विभाज्य हैं। संख्या $16 + 20 = 36$ भी 4 से विभाज्य है। इसकी जाँच संख्याओं के कुछ और युग्म लेकर कीजिए। 16 और 20 के अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंडों के लिए भी इसकी जाँच कीजिए। इस प्रकार, **यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का योग भी उस संख्या से विभाज्य होगा।**

(iv) दोनों संख्याएँ 35 और 20 संख्या 5 से विभाज्य हैं। क्या इनका अंतर $35 - 20 = 15$ भी 5 से विभाज्य है? इसकी जाँच संख्याओं के ऐसे कुछ अन्य युग्म लेकर भी कीजिए। इस प्रकार, **यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का अंतर भी उस संख्या से विभाज्य होगा।** दो संख्याओं के अन्य युग्म लेकर उपर्युक्त दिए गए चारों नियमों की जाँच कीजिए।

3.7 अभाज्य गुणनखंडन

यदि किसी संख्या को उसके गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाए, तो हम कहते हैं कि हमने उस संख्या को गुणनखंडित (factorised) कर लिया है अथवा उसके गुणनखंड कर लिए हैं। इस प्रकार, जब हम $24 = 3 \times 8$ लिखते हैं,

तो हम कहते हैं कि हमने 24 के गुणनखंड कर लिए हैं। यह 24 के गुणनखंडनों में से एक गुणनखंडन है। इसके अन्य गुणनखंडन निम्न हैं:

$24 = 2 \times 12$	$24 = 4 \times 6$	$24 = 3 \times 8$
$= 2 \times 2 \times 6$	$= 2 \times 2 \times 6$	$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$

24 के उपरोक्त सभी गुणनखंडनों में, अंत में हम एक ही गुणनखंडन $2 \times 2 \times 2 \times 3$ पर पहुँचते हैं। इस गुणनखंडन में केवल 2 और 3 ही गुणनखंड हैं और ये अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडन (prime factorisation) कहलाता है।

आइए इसकी जाँच संख्या 36 से करें।

36

2×18	3×12	4×9	6×6
$2 \times 2 \times 9$	$3 \times 3 \times 4$	$2 \times 2 \times 9$	$2 \times 3 \times 6$
$2 \times 2 \times 3 \times 3$	$3 \times 3 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 3 \times 3$	$2 \times 3 \times 2 \times 3$
	$2 \times 2 \times 3 \times 3$		$2 \times 2 \times 3 \times 3$

36 का अभाज्य गुणनखंडन $2 \times 2 \times 3 \times 3$ है। यह 36 का केवल एक ही अभाज्य गुणनखंडन है।

1 से बड़ी प्रत्येक संख्या का केवल एक अभाज्य गुणनखंडन होता है। यह गुण अभाज्य गुणनखंडन गुण (prime factorisation property) या अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Arithmetic) कहलाता है।

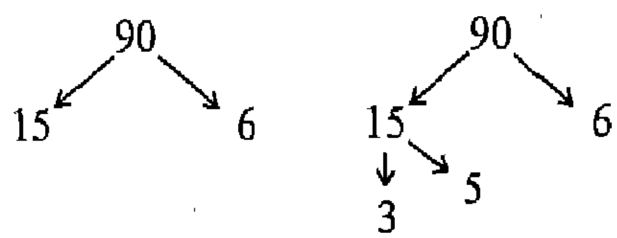
प्रयास कीजिए

16; 28 और 38 के अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।

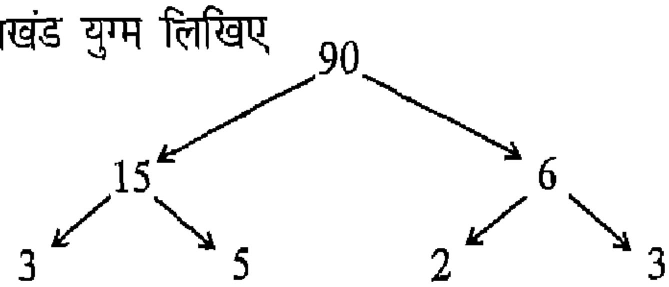
इन्हें कीजिए

गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree)

कोई संख्या चुनिए और उसे लिखिए	इसका कोई गुणनखंड युग्म सोचिए, जैसे	अब 15 के एक गुणनखंड युग्म को सोचिए, जैसे
90	90=15×6	15 = 3×5



6 के गुणनखंड युग्म लिखिए



ऐसा ही निम्न संख्याएँ लेकर कीजिए।

(a) 8 (b) 12

उदाहरण 7 : 980 का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए।

हल : हम ऐसा निम्न प्रकार करते हैं:

हम संख्या 980 को 2, 3, 5, 7 इत्यादि से इसी क्रम में बार-बार भाग देते हैं। यह प्रक्रिया हम तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि भागफल इनसे विभाजित होता रहे।

2	980
2	490
5	245
7	49
7	7
	1

इस प्रकार 980 का अभाज्य गुणनखंडन है : $980 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$

प्रश्नावली 3.5

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?

   (a) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है, तो वह 9 से भी विभाज्य होती है।

   (b) यदि एक संख्या 9 से विभाज्य है, तो वह 3 से भी अवश्य विभाज्य होगी।

   (c) एक संख्या 18 से भी विभाज्य होती है, यदि वह 3 और 6 दोनों से विभाज्य हो।

   (d) यदि एक संख्या 9 और 10 दोनों से विभाज्य हो, तो वह 90 से भी विभाज्य होगी।

   (e) यदि दो संख्याएँ सह-अभाज्य हों, तो इनमें से कम से कम एक अवश्य ही अभाज्य संख्या होगी।

   (f) 4 से विभाज्य सभी संख्याएँ 8 से भी अवश्य विभाज्य होनी चाहिए।

   (g) 8 से विभाज्य सभी संख्याएँ 4 से विभाज्य होनी चाहिए।

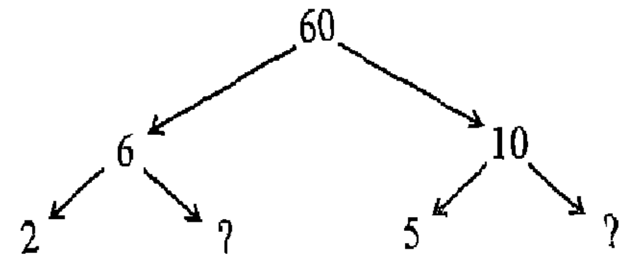
   (h) दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग 4 से विभाज्य होता है।

   (i) यदि कोई संख्या दो संख्याओं को अलग-अलग पूरा-पूरा विभाजित करती है, तो वह उनके योग को भी पूरा-पूरा विभाजित करेगी।

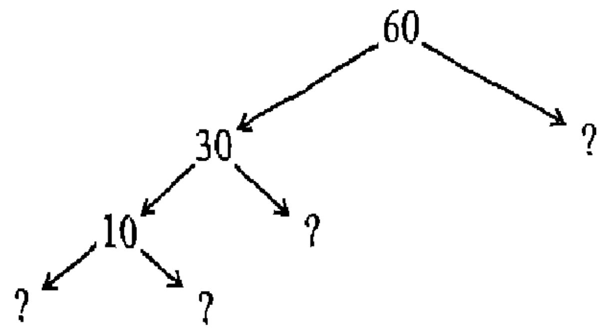
   (j) यदि कोई संख्या दो संख्याओं के योग को पूरी तरह विभाजित करती है, तो वह उन दोनों संख्याओं को अलग-अलग भी विभाजित करेगी।

2. यहाँ 60 के लिए दो भिन्न-भिन्न गुणनखंड वृक्ष दिए हैं। इनमें अज्ञात संख्याएँ लिखिए।

a)



b)



3. एक भाज्य संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में किन गुणनखंडों को सम्मिलित नहीं किया जाता है?

4. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंडन के रूप में व्यक्त कीजिए।

5. पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंडन के रूप में व्यक्त कीजिए।

6. 1729 के सभी अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए और उन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। अब दो क्रमागत अभाज्य गुणनखंडों में यदि कोई संबंध है तो लिखिए।

7. तीन क्रमागत संख्याओं का गुणनफल सदैव 6 से विभाज्य होता है। इस कथन को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट कीजिए।

8. निम्न में से किन व्यंजकों में अभाज्य गुणनखंडन किए गए हैं :

(a) $24 = 2 \times 3 \times 4$ (b) $56 = 1 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2$

(c) $70 = 2 \times 5 \times 7$ (d) $54 = 2 \times 3 \times 9$

9. 15470 का अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।

10. बिना भाग किए ज्ञात कीजिए कि क्या 25110 संख्या 45 से विभाज्य है।
[संकेत: 5 और 9 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। दी हुई संख्या की 5 और 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।]
11. संख्या 18, 2 और 3 दोनों से विभाज्य है। यह 2 × 3 = 6 से भी विभाज्य है। इसी प्रकार, एक संख्या 4 और 6 दोनों से विभाज्य है। क्या हम कह सकते हैं कि वह संख्या 4 × 6 = 24 से भी विभाज्य होगी। यदि नहीं, तो अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक उदाहरण दीजिए।
12. मैं चार भिन्न-भिन्न अभाज्य गुणनखंडों वाली सबसे छोटी संख्या हूँ। क्या आप मुझे ज्ञात कर सकते हैं?

3.8 महत्तम समापवर्तक

हम दो संख्याओं के सार्व गुणनखंड ज्ञात करना सीख चुके हैं। अब हम इन सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा गुणनखंड ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

12 और 16 के सार्व गुणनखंड क्या हैं? ये 1,2 और 4 हैं।

इन सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा कौन-सा है? यह 4 है।

20, 28 और 36 के सार्व गुणनखंड क्या हैं। ये 1, 2 और 4 हैं तथा इनमें पुनः सबसे बड़ा गुणनखंड 4 है।

दो या अधिक दी हुई संख्याओं के सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा सार्व गुणनखंड इन दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (highest common factor) कहलाता है। महत्तम समापवर्तक को संक्षेप में म.स. (या HCF) भी लिखते हैं। इसे महत्तम (सबसे बड़ा) सार्व भाजक (greatest common divisor) या (GCD) भी कहा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्न का म.स. ज्ञात कीजिए:

(i) 24 और 36 (ii) 15, 25 और 30

(iii) 8 और 12 (iv) 12, 16 और 28

प्रश्नावली 3.6

1. निम्नलिखित संख्याओं के म.स. ज्ञात कीजिए:
   (a) 18, 48 (b) 30, 42 (c) 18, 60 (d) 27, 63
   (e) 36, 84 (f) 34, 102 (g) 70, 105, 175 (h) 91, 112, 49
   (i) 18, 54, 81 (j) 12, 45, 75
2. निम्न का म.स. क्या है?
   (a) दो क्रमागत संख्याएँ (b) दो क्रमागत सम संख्याएँ
   (c) दो क्रमागत विषम संख्याएँ
3. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो सह-अभाज्य संख्याओं 4 और 15 का म.स. इस प्रकार ज्ञात किया गया:
   $4 = 2 \times 2$ और $15 = 3 \times 5$
   चूँकि इन गुणनखंडों में कोई अभाज्य सार्व गुणनखंड नहीं है, इसलिए 4 और 15 का म.स. शून्य है। क्या यह उत्तर सही है? यदि नहीं तो सही म.स. क्या है?

3.9 लघुतम समापवर्त्य

4 और 6 के सार्व गुणज क्या हैं? ये 12, 24, 36, ... हैं। इनमें सबसे छोटा गुणज कौन-सा है? यह 12 है। हम कहते हैं कि 4 और 6 का सबसे छोटा (लघुतम) गुणज या लघुतम समापवर्त्य (lowest common multiple) 12 है। यह वह छोटी से छोटी संख्या है जो दोनों का गुणज है। **दो या अधिक दी हुई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य इन संख्याओं के सार्व गुणजों में से सबसे छोटा (लघुतम या निम्नतम) गुणज होता है। संक्षेप में, इसे ल.स. (LCM) भी लिखा जाता है।**

8 और 12 का ल.स. क्या है? 4 और 9 का ल.स. क्या है? 6 और 9 का ल.स. क्या है?

उदाहरण 8 : 12 और 18 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि 12 और 18 के सार्व गुणज 36, 72, 108 इत्यादि हैं। इनमें सब से छोटा 36 है। आइए एक और विधि से इसे निकाले:

12 और 18 के अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं:

$12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$

इन अभाज्य गुणनखंडनों में, अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम दो बार आता है (यह 12 के गुणनखंडों में है)। इसी प्रकार अभाज्य गुणनखंड 3 अधिकतम दो बार आता है (यह 18 के गुणनखंडों में है)। दो संख्याओं का ल.स. उन अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल है जो उन संख्याओं में अधिकतम बार आते है। अत: इनका ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ है।

उदाहरण 9 : 24 और 90 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : 24 और 90 के अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं:

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \qquad 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

इन अभाज्य गुणनखंडनों में, अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम तीन बार आता है (यह 24 में है); अभाज्य गुणनखंड 3 दो बार आता है (यह 90 में है) और अभाज्य गुणनखंड 5 केवल एक बार 90 में आता है।

इसलिए, वाँछित ल.स. $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 360$

उदाहरण 10 : 40, 48 और 45 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : 40, 48, और 45 के अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं:

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$45 = 3 \times 3 \times 5$

अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम चार बार (यह 48 में है), अभाज्य गुणनखंड 3 अधिकतम दो बार (यह 45 में है) और अभाज्य गुणनखंड 5 केवल एक बार (यह 40 और 45 दोनों में है) आता है।

अत: वाँछित ल.स. $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 720$

लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) को एक अन्य विधि से भी ज्ञात किया जा सकता है, जो अगले उदाहरण में दर्शाई गई है:

उदाहरण 11 : 20, 25 और 30 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : हम संख्याओं को एक पंक्ति में नीचे दर्शाए अनुसार लिखते हैं:

2	20	25	30	(A)
2	10	25	15	(B)
3	5	25	15	(C)
5	5	25	5	(D)
5	1	5	1	(E)
	1	1	1	

अत:, ल.स. = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

A. (सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से भाग दीजिए। 25 जैसी संख्या 2 से विभाज्य नहीं है। इसलिए इन्हें अगली पंक्ति में वैसा का वैसा ही रख दिया जाता है)।

B. (पुन: 2 से भाग दीजिए। इसे तब तक जारी रखिए जब तक 2 के गुणज मिलते रहें)।

C. (अगली अभाज्य संख्या 3 से भाग दीजिए)।

D. (अगली अभाज्य संख्या 5 से भाग दीजिए)।

E. (पुन: 5 से भाग दीजिए)।

म.स. और ल.स. पर कुछ और उदाहरण

हमें अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ हम म.स. और ल.स. की संकल्पनाओं का प्रयोग करते हैं। हम इन्हें कुछ उदाहरणों की सहायता से समझाएँगे।

उदाहरण 12 : दो टैंकरों (tankers) में क्रमश: 850 लीटर और 680 लीटर मिट्टी का तेल आता है। उस बर्तन की अधिकतम धारिता (capacity) ज्ञात कीजिए, जो इन दोनों टैंकरों के तेल को पूरा-पूरा माप देगा।

हल : वाँछित बर्तन को दोनों टैंकरों के तेल को पूरा-पूरा मापना है। अत: इसकी धारिता दोनों टैंकरों की धारिताओं का एक पूरा-पूरा विभाजक होगा। साथ ही, इसकी धारिता अधिकतम भी होनी चाहिए। अत:

ऐसे बर्तन की अधिकतम धारिता 850 और 680 का म.स. होगी। अब, 850 और 680 का म.स. 170 है।

अत: वाँछित बर्तन की अधिकतम धारिता 170 लीटर है। यह पहले बर्तन को 5 बार में और दूसरे को 4 बार में पूरा-पूरा माप देगा।

उदाहरण 13 : प्रात:कालीन सैर में, तीन व्यक्ति एक साथ कदम उठाकर चलना प्रारम्भ करते हैं। उनके कदमों की लंबाइयाँ क्रमश: 80 सेमी, 85 सेमी और 90 सेमी हैं। इनमें से प्रत्येक न्यूनतम कितनी दूरी चले कि वे उसे पूरे-पूरे कदमों में तय करें?

हल : प्रत्येक व्यक्ति द्वारा चली गई दूरी को समान और न्यूनतम रहना है। यह वाँछित न्यूनतम दूरी, जो प्रत्येक व्यक्ति को चलनी है, उनके कदमों की मापों का लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) होगी। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

इसलिए, हम 80, 85 और 90 का ल.स. ज्ञात करते हैं। 80, 85 और 90 का ल.स. 12240 है।

अत: वाँछित न्यूनतम दूरी 12240 सेमी है।

उदाहरण 14 : वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 12, 16, 24 और 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष रहता है।

हल : हम 12, 16, 24 और 36 का ल.स. निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं:

2	12	16	24	36
2	6	8	12	18
2	3	4	6	9
2	3	2	3	9
3	3	1	3	9
3	1	1	1	3
	1	1	1	1

इस प्रकार, ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

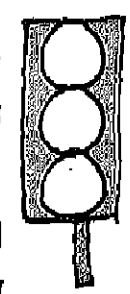
144 वह सबसे छोटी संख्या है जिसे 12, 16, 24 और 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 0 शेष रहेगा।

परंतु हमें ऐसी सबसे छोटी संख्या चाहिए जिसमें प्रत्येक दशा में 7 शेष रहे। अत: वाँछित संख्या 144 से 7 अधिक होगी।

इस प्रकार, वाँछित सबसे छोटी संख्या = 144 + 7 = 151 है।

प्रश्नावली 3.7

1. रेणु 75 किग्रा और 69 किग्रा भारों वाली दो खाद की बोरियाँ खरीदती हैं। भार के उस बट्टे का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जो दोनों बोरियों के भारों को पूरा-पूरा माप ले।
2. तीन लड़के एक ही स्थान से एक साथ कदम उठाकर चलना प्रारम्भ करते हैं। उनके कदमों की माप क्रमश: 63 सेमी, 70 सेमी और 77 सेमी हैं। इनमें से प्रत्येक कितनी न्यूनतम दूरी तय करे कि वह दूरी पूरे-पूरे कदमों में तय हो जाए?
3. किसी कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 825 सेमी, 675 सेमी और 450 सेमी हैं। ऐसा सबसे लंबा फीता (tape) ज्ञात कीजिए जो कमरे की तीनों विमाओं (dimensions) को पूरा-पूरा माप ले।
4. 6,8 और 12 से विभाज्य तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।
5. 8,10 और 12 से विभाज्य तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।
6. तीन विभिन्न चौराहों की ट्रैफिक लाइट (traffic lights) क्रमश: प्रत्येक 48 सैकंड, 72 सैकंड और 108 सैकंड बाद बदलती हैं। यदि वे एक साथ प्रात: 7 बजे बदलें, तो वे पुन: एक साथ कब बदलेंगी?



7. तीन टैंकरों में क्रमश: 403 लीटर, 434 लीटर और 465 लीटर डीज़ल है। उस बर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए जो इन तीनों टैंकरों के डीज़ल को पूरा-पूरा माप देगा।
8. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 6, 15 और 18 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 5 शेष रहे।
9. चार अंकों की वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 18, 24 और 32 से विभाज्य है।
10. निम्नलिखित संख्याओं का ल.स. ज्ञात कीजिए जिनमें एक संख्या सदैव 3 का एक गुणज है।

    (a) 9 और 4 (b) 12 और 5

(c) 6 और 5 (d) 15 और 4

प्राप्त ल.स. में एक सामान्य गुण का अवलोकन कीजिए। क्या ल.स. प्रत्येक स्थिति में दोनों संख्याओं का गुणनफल है? क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दो संख्याओं का ल.स. सदैव 3 का एक गुणज है?

11. निम्नलिखित संख्याओं का ल.स. ज्ञात कीजिए जिनमें एक संख्या दूसरी संख्या का एक गुणनखंड है:

    (a) 5, 20 (b) 6, 18

    (c) 12, 48 (d) 9, 45

    प्राप्त परिणामों में आप क्या देखते हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. गुणजों ओर गुणनखंडों की पहचान कैसे कर सकते हैं।
2. हमने अब तक चर्चा की और निम्न के को खोजा
   (a) एक संख्या का गुणनखंड उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है।
   (b) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखंड होती है। प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है।
   (c) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।
   (d) प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखंडों का एक गुणज होती हैं।
   (e) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
   (f) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।
3. हमने सीखा है
   (a) वह संख्या जिसके दो ही गुणनखंड होते हैं, संख्या स्वयं और 1, अभाज्य संख्या कहलाती है। जिन संख्याओं के दो से अधिक गुणनखंड होते हैं वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
   (b) संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है। अन्य सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।
   (c) दो संख्याएँ जिनका सार्व गुणनखंड केवल 1 हो, सह-अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

(d) यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाज्य है, तो वह दूसरी संख्या के प्रत्येक गुणनखंड से भी विभाजित होगी।

(e) वह संख्या जो दो सह-अभाज्य संख्याओं से विभाज्य होती है, उनके गुणनफल से भी विभाज्य होगी।

4. संख्याओं को बिना भाग की क्रिया किए उनकी छोटी 2, 3, 4, 5, 8, 9 और 11 से विभाज्यता की जाँच कर सकते हैं। हमने संख्या के अंकों का, विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता के संबंधों का अंवेषण किया है।

(a) 2, 5 और 10 से विभाज्यता संख्या के अंकों के योग द्वारा की जा सकती है।

(b) 3 और 9 से विभाज्यता केवल इकाई अंक को देखकर बताई जा सकती है।

(c) 4 से विभाज्यता इकाई और दहाई तथा 8 से विभाज्यता इकाई, दहाई व सैंकड़े से बनने वाली संख्या द्वारा जाँची जा सकती है।

(d) 11 से विभाज्यता दाई ओर से सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग के अंतर द्वारा जाँची जा सकती है।

5. यदि दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित होती हैं, तो उन दोनों का अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।

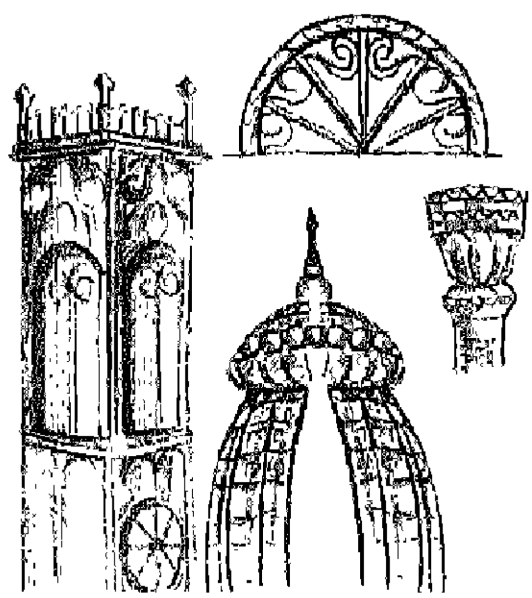
6. (a) दो या अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) उसके सार्व गुणनखंडों में से सबसे बड़ा होगा।

(b) दो या अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) उसके सार्व गुणजों में से सबसे छोटा होगा।

अध्याय 4

भूमिका

ज्यामिति का एक लंबा और शानदार (बहुमूल्य) इतिहास है। शब्द 'ज्यामिति' (Geometry) यूनानी शब्द जिओमीट्रोन (Geometron) का अंग्रेजी तुल्य है। जिया (Geo) का अर्थ है 'भूमि' और 'मीट्रोन (Metron) का अर्थ है 'मापना'। इतिहासकारों के अनुसार, प्राचीन समय में ज्यामितीय अवधारणाएँ संभवत: कला, वास्तु-कला या शिल्प कला (Architecture) और भूमि मापन की आवश्यकताओं के कारण विकसित हुईं। इनमें वे अवसर भी सम्मिलित हैं जब खेतीहर की भूमि की परिसीमाओं (boundaries) को बिना किसी शिकायत की संभावना रखते हुए, अंकित किया जाता था। वैभवपूर्ण राजभवनों, मंदिरों, झीलों, बाँधों और नगरों के निर्माणों, कला और वास्तुकला (या शिल्प) ने इन अवधारणाओं को और उजागर किया। आजकल भी कला, मापन, वास्तुकला, इंजीनियरिंग (engineering), कपड़ों के डिज़ाइन, इत्यादि के सभी रूपों में ज्यामितीय अवधारणाओं का प्रभाव देखा जा सकता है। आप विभिन्न प्रकार की वस्तुओं जैसे बक्स (पेटी), मेज, पुस्तक, अपने स्कूल में लंच ले जाने के लिए खाने के डिब्बे, गेंद जिससे आप खेलते हैं, आदि को देखते हैं और उनका प्रयोग भी करते हैं। इन सभी वस्तुओं के भिन्न-भिन्न आकार (shapes) होते हैं। जो रूलर (ruler) आप प्रयोग करते हैं और पेंसिल जिससे आप लिखते हैं वे सीधी (straight) हैं। एक चूड़ी, एक रुपये का सिक्का या एक गेंद के चित्र गोल (round) प्रतीत होते हैं।

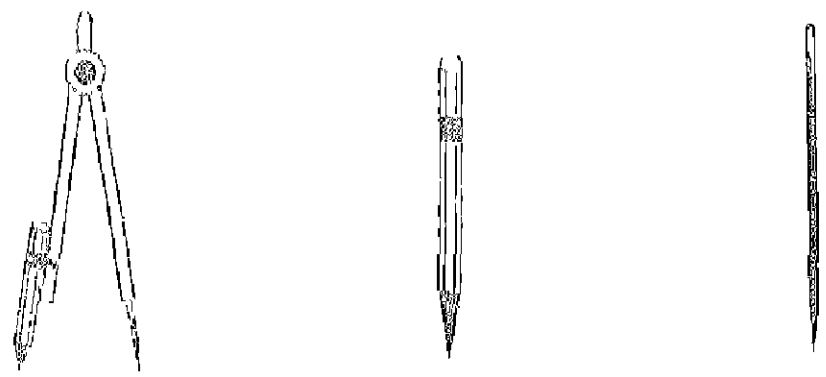


यहाँ आप कुछ रोचक तथ्यों के बारे में पढ़ेंगे, जो आपके चारों ओर उपस्थित आकारों के बारे में अधिक जानकारी प्राप्त करने में आपकी सहायता करेंगे।

बिंदु

कागज़ पर एक पेंसिल के नुकीले सिरे से एक चिह्न (dot) अंकित कीजिए। सिरा जितना नुकीला होगा, चिह्न उतना ही सूक्ष्म (छोटा) होगा। लगभग एक बिना दिखाई देने वाला सूक्ष्म चिह्न आपको एक बिंदु की अवधारणा का आभास कराएगा। बिंदु (point) एक स्थिति (या अवस्थिति) (location) निर्धारित करता है।

बिंदु के लिए कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं :



परकार का सिरा | पेंसिल का नुकीला सिरा | एक सुई का नुकीला सिरा

यदि आप किसी कागज़ पर, मान लीजिए, तीन बिंदु अंकित करें, तो आपको इनमें भेद बताने की आवश्यकता पड़ेगी। इसके लिए, इन्हें अंग्रेजी के बड़े अक्षर A, B, C, इत्यादि से व्यक्त किया जाता है।

• B

• A

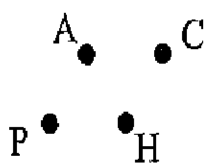
• C

इन बिंदुओं को बिंदु A, बिंदु B और बिंदु C पढ़ा जाता है।

बिंदु निःसंदेह बहुत छोटे होने चाहिए।

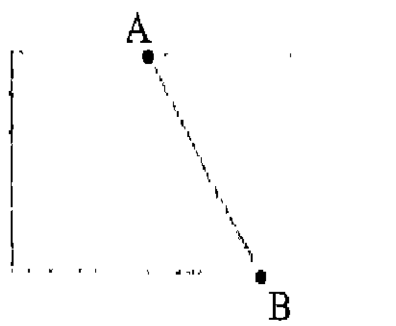
प्रयास कीजिए

1. अपनी पेंसिल के नुकीले सिरे से, एक कागज़ पर चार बिंदु अंकित कीजिए तथा उन्हें नाम A,C,P और H दीजिए। इन बिंदुओं को विभिन्न प्रकारों से नाम दीजिए। नाम देने का एक प्रकार संलग्न आकृति के अनुसार हो सकता है।

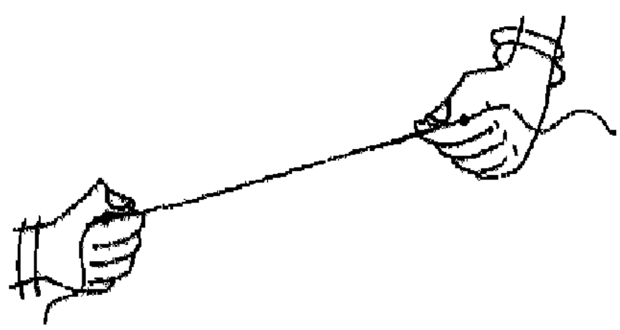


2. आसमान में एक तारा हमें एक बिंदु की अवधारणा का आभास कराता है। अपने दैनिक जीवन से इसी प्रकार की पाँच स्थितियाँ चुनकर दीजिए।

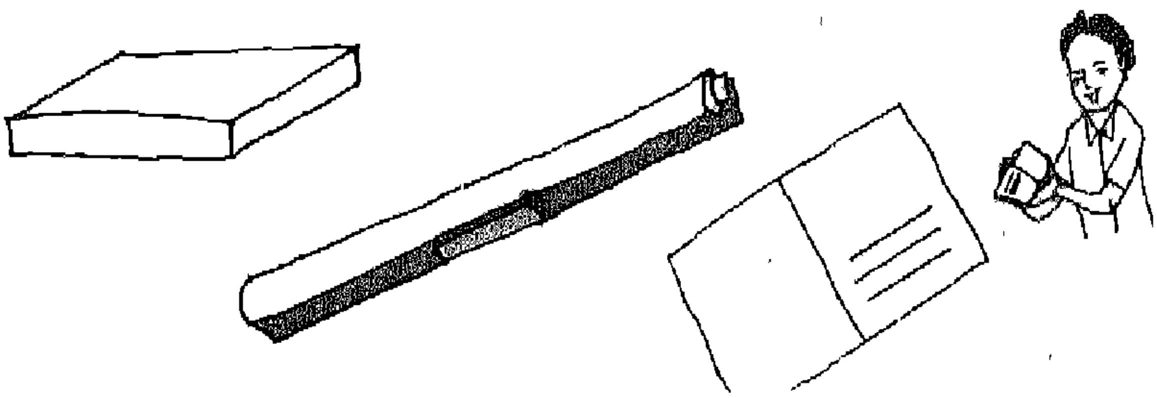
4.3 रेखाखंड



एक कागज़ को मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। क्या आपको कोई मोड़ का निशान दिखाई देता है? इससे एक रेखाखंड (line segment) की अवधारणा का आभास होता है। इसके दो अंत बिंदु (end points) A और B हैं। एक पतला-धागा (या डोरी) लीजिए। इसके दोनों सिरों को कसकर पकड़िए ताकि धागे में कोई ढील न रहे। यह एक रेखाखंड निरूपित करता है। हाथों से पकड़े हुए सिरे इस रेखाखंड के अंत बिंदु हैं।



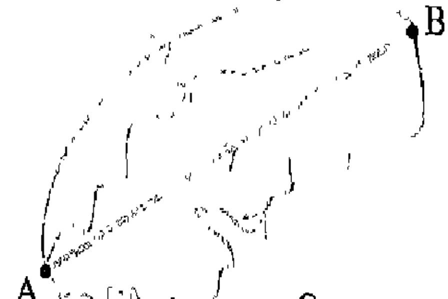
रेखाखंड के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं :



एक बक्स का किनारा　　एक ट्यूबलाइट　　एक पोस्टकार्ड का किनारा

अपने आस-पास से रेखाखंडों के कुछ और उदाहरण देने का प्रयत्न कीजिए।

एक कागज़ पर दो बिंदु A और B अंकित कीजिए। इन दोनों बिंदुओं को सभी संभव रास्तों से जोड़ने का प्रयत्न कीजिए (आकृति 4.1)।



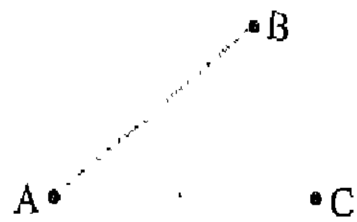
आकृति 4.1

A से B तक का सबसे छोटा रास्ता क्या है?

A और B को जोड़ने वाला यह सबसे छोटा रास्ता (इसमें बिंदु A और B भी सम्मिलित हैं), जो संलग्न आकृति 4.1 में दर्शाया गया है, एक रेखाखंड है। इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से व्यक्त किया जाता है। बिंदु A और B इस रेखाखंड के अंत बिंदु हैं।

प्रयास कीजिए

1. संलग्न आकृति में दिए रेखाखंडों के नाम दीजिए (आकृति 4.2)। क्या A प्रत्येक रेखाखंड का एक अंत बिंदु है?



आकृति 4.2

कल्पना कीजिए कि A से B तक के रेखाखंड (अर्थात् $\overline{AB}$) को A से आगे एक दिशा में और B से आगे दूसरी दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत किया गया

है (आकृति को देखिए)। आपको रेखा (line) का एक उदाहरण प्राप्त हो जाएगा।

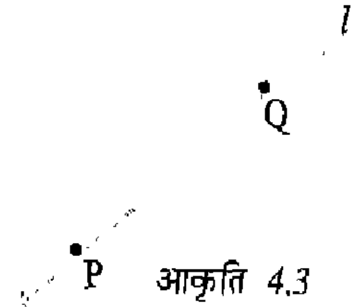


क्या आप सोचते हैं कि आप कागज़ पर पूरी रेखा खींच सकते हैं? नहीं। (क्यों?)

दो बिंदुओं A और B से होकर जाने वाली रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ से निरूपित करते हैं। यह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है। इस पर असंख्य बिंदु स्थित होते हैं। (इनके बारे में सोचिए)

रेखा को निश्चित करने के लिए, दो बिंदु पर्याप्त हैं। हम कहते हैं कि दो बिंदु एक रेखा निर्धारित (determine) करते हैं।

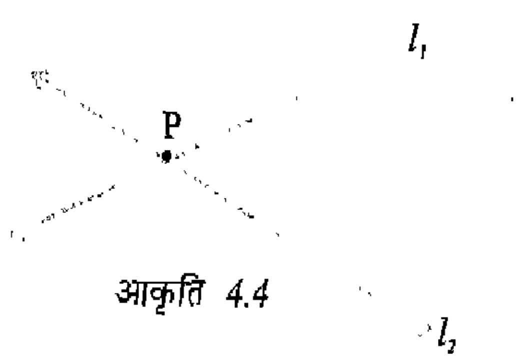
संलग्न आकृति (आकृति 4.3) रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ की है। कभी-कभी एक रेखा को l जैसे अक्षर से भी व्यक्त किया जाता है।



आकृति 4.3

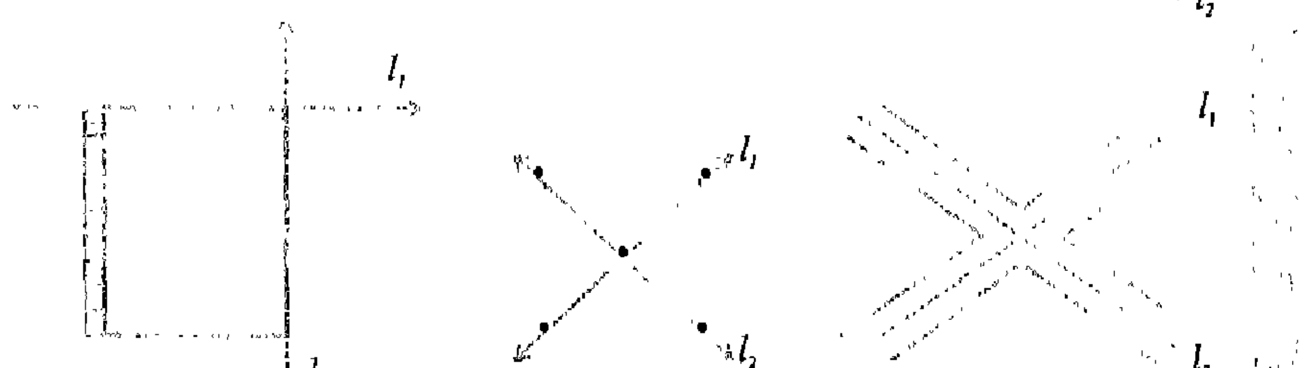
प्रतिच्छेदी रेखाएँ

संलग्न आकृति 4.4 को देखिए। इसमें दो रेखाएँ l_1 और l_2 दर्शाई गई हैं। ये दोनों रेखाएँ बिंदु P से होकर जाती हैं। हम कहते हैं कि रेखाएँ l_1 और l_2 बिंदु P पर प्रतिच्छेद (intersect) करती हैं। यदि दो रेखाओं में एक उभयनिष्ठ बिंदु हो, तो वे *प्रतिच्छेदी रेखाएँ (intersecting lines)* कहलाती हैं।



आकृति 4.4

प्रतिच्छेदी रेखाओं के कुछ उदाहरण निम्न हैं :



आपकी अभ्यास पुस्तिका के दो संलग्न किनारे | अंग्रेजी वर्णमाला का अक्षर X | परस्पर काटती हुई सड़कें

आकृति 4.5

प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्मों के कुछ और उदाहरण ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

इन्हें कीजिए

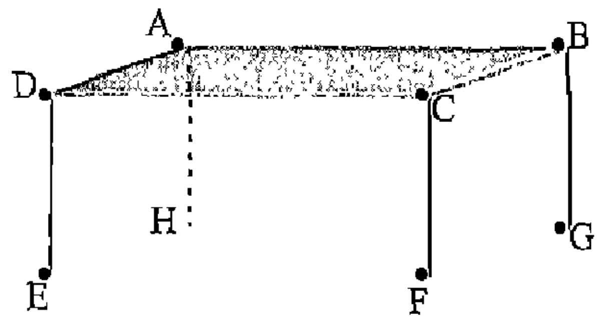
एक कागज़ लीजिए। इसे दो बार मोड़िए (और मोड़ के निशान बनाइए) ताकि दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ प्राप्त हो जाएँ और चर्चा कीजिए :

(a) क्या दो रेखाएँ एक से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं?

(b) क्या दो से अधिक रेखाएँ एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं?

4.6 समांतर रेखाएँ

आइए आकृति 4.6 में दर्शाई गई मेज को देखें। इसका ऊपरी सिरा ABCD सपाट (Flat) है। क्या आप कुछ रेखाखंड और बिंदु देख पा रहे हैं? क्या यहाँ प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं?



आकृति 4.6

हाँ, $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{BC}$ बिंदु B पर प्रतिच्छेद करती हैं। कौन-सी रेखाएँ A पर प्रतिच्छेद करती हैं? कौन-सी रेखाएँ C पर प्रतिच्छेद करती हैं और कौन-सी रेखाएँ D पर प्रतिच्छेद करती हैं?

क्या रेखाएँ AD और CD परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं?

क्या रेखाएँ AD और BC परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं?

आपने देखा कि मेज के ऊपरी पृष्ठ पर कुछ रेखाएँ हैं जो परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं (उन्हें कितना भी बढ़ाया जाए)। $\overleftrightarrow{AD}$ और $\overleftrightarrow{BC}$ ऐसी रेखाओं का एक युग्म बनाती हैं। मेज के ऊपरी सिरे पर क्या आप रेखाओं का कोई ऐसा ही अन्य युग्म (जो कहीं नहीं मिलती) बता सकते हैं?

ऐसी रेखाएँ (जैसी मेज में ऊपरी सिरे पर हैं) जो प्रतिच्छेद नहीं करती **समांतर रेखाएँ** (**parrallel lines**) कहलाती हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

आप समांतर रेखाओं को और कहाँ देखते हैं? इनके 10 उदाहरण ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

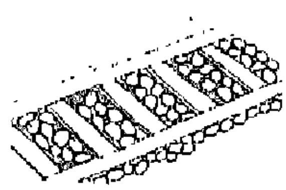
यदि दो रेखाएँ AB और CD समांतर हों, तो हम इन्हें सांकेतिक रूप में $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ लिखते हैं।

यदि दो रेखाएँ l_1 और l_2 समांतर हैं, तो हम $l_1 \parallel l_2$ लिखते हैं।

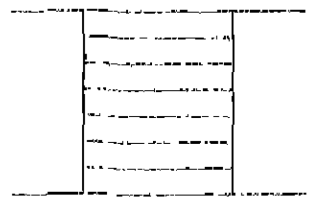
क्या आप नीचे दी आकृति में समांतर रेखाएँ बता सकते हैं?



रूलर (स्केल) के सम्मुख किनारे



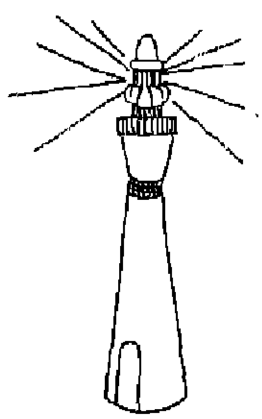
रेल की पटरी



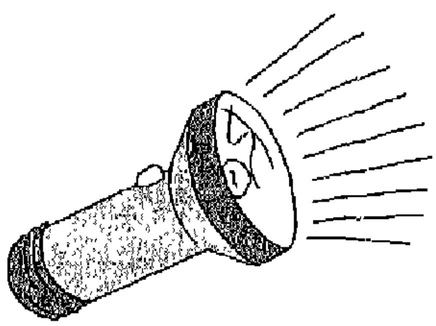
खिड़की की सलाखें

4.7 किरण

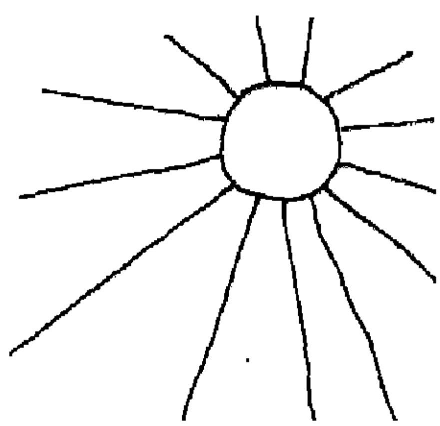
किरण (ray) के लिए कुछ निम्नलिखित मॉडल हैं :



एक लाइट हाउस से निकली हुई प्रकाश की किरणें

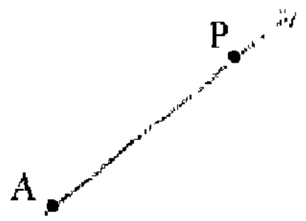


टार्च से निकली प्रकाश की किरणें



सूर्य की किरणें

किरण रेखा का एक भाग होता है। यह एक बिंदु से प्रारंभ होती है (जिसे प्रारंभिक बिंदु (initial point) कहते हैं) और एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होती है।



आकृति 4.7

यहाँ दाईं ओर किरण की दी हुई आकृति (आकृति 4.7) को देखिए। इस किरण पर दो बिंदु दर्शाए गए हैं। ये हैं :

(a) A, जो प्रारंभिक बिंदु है।

(b) P, जो किरण पर एक अन्य बिंदु है।

हम इसे $\overrightarrow{AP}$ से व्यक्त करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

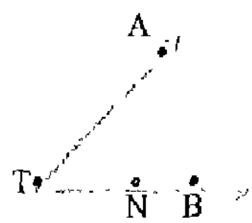
यदि $\overrightarrow{PQ}$ एक किरण है, तो

(a) इसका प्रारंभिक बिंदु क्या है?

(b) बिंदु Q किरण पर कहाँ स्थित होता है?

(c) क्या हम कह सकते हैं कि Q इस किरण का प्रारंभिक बिंदु है?

प्रयास कीजिए

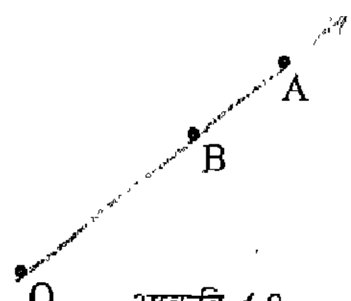


आकृति 4.8

1. सामने दी आकृति (आकृति 4.8) में दर्शाई गई किरणों के नाम लिखिए।
2. क्या T इन सभी किरणों का प्रारंभिक बिंदु है?

संलग्न आकृति 4.9 में, एक किरण OA दी है। यह O से प्रारंभ होती है और A से होकर जाती है। यह किरण बिंदु B से होकर भी जाती है।

क्या आप इसे $\overrightarrow{OB}$ भी कह सकते हैं? क्यों?



आकृति 4.9

यहाँ $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ एक ही किरण को दर्शाते हैं।

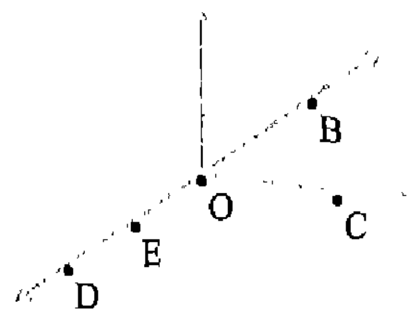
क्या हम किरण $\overrightarrow{OA}$ को किरण $\overrightarrow{AO}$ लिख सकते हैं? क्यों या क्यों नहीं?

पाँच किरणें खींचिए और उनके उचित नाम लिखिए।

इन किरणों के सिरे पर लगे तीर क्या दर्शाते हैं?

प्रश्नावली 4.1

1. संलग्न आकृति का प्रयोग करके, निम्न के नाम लिखिए:

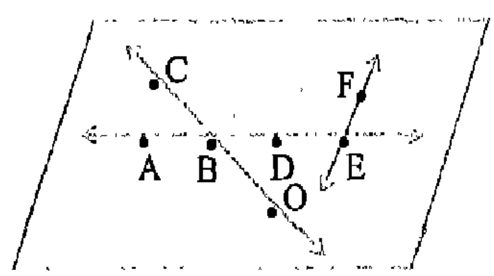


   (a) पाँच बिंदु
   (b) एक रेखा
   (c) चार किरणें
   (d) पाँच रेखाखंड

2. संलग्न आकृति में दी हुई रेखा के सभी संभव प्रकारों के नाम लिखिए। आप इन चार बिंदुओं में से किसी भी बिंदु का प्रयोग कर सकते हैं।



3. संलग्न आकृति को देखकर नाम लिखिए :



   (a) रेखाएँ जिसमें बिंदु E सम्मिलित हैं
   (b) A से होकर जाने वाली रेखा
   (c) वह रेखा जिस पर O स्थित है
   (d) प्रतिच्छेदी रेखाओं के दो युग्म

4. निम्नलिखित से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

   (a) एक बिंदु (b) दो बिंदु

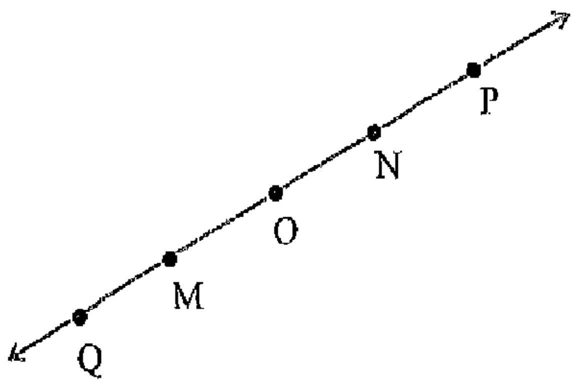
5. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक के लिए एक रफ (Rough) आकृति बनाइए और उचित रूप से उसे नामांकित कीजिए :

   (a) बिंदु P रेखाखंड $\overline{AB}$ पर स्थित है।
   (b) रेखाएँ XY और PQ बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(c) रेखा l पर E और F स्थित हैं, परंतु D स्थित नहीं है।

(d) $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ बिंदु O पर मिलती हैं।

6. रेखा $\overleftrightarrow{MN}$ की संलग्न आकृति को देखिए। इस आकृति के संदर्भ में बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :



(a) Q, M, O, N और P रेखा $\overleftrightarrow{MN}$ पर स्थित बिंदु हैं।

(b) M, O और N रेखाखंड $\overline{MN}$ पर स्थित बिंदु हैं।

(c) M और N रेखाखंड $\overline{MN}$ के अंत बिंदु हैं।

(d) O और N रेखाखंड $\overline{OP}$ के अंत बिंदु हैं।

(e) M रेखाखंड $\overline{QO}$ के दोनों अंत बिंदुओं में से एक बिंदु है।

(f) M किरण $\overrightarrow{OP}$ पर एक बिंदु है।

(g) किरण $\overrightarrow{OP}$ किरण $\overrightarrow{QP}$ से भिन्न है।

(h) किरण $\overrightarrow{OP}$ वही है जो किरण $\overrightarrow{OM}$ है।

(i) किरण $\overrightarrow{OM}$ किरण $\overrightarrow{OP}$ के विपरीत (Opposite) नहीं है।

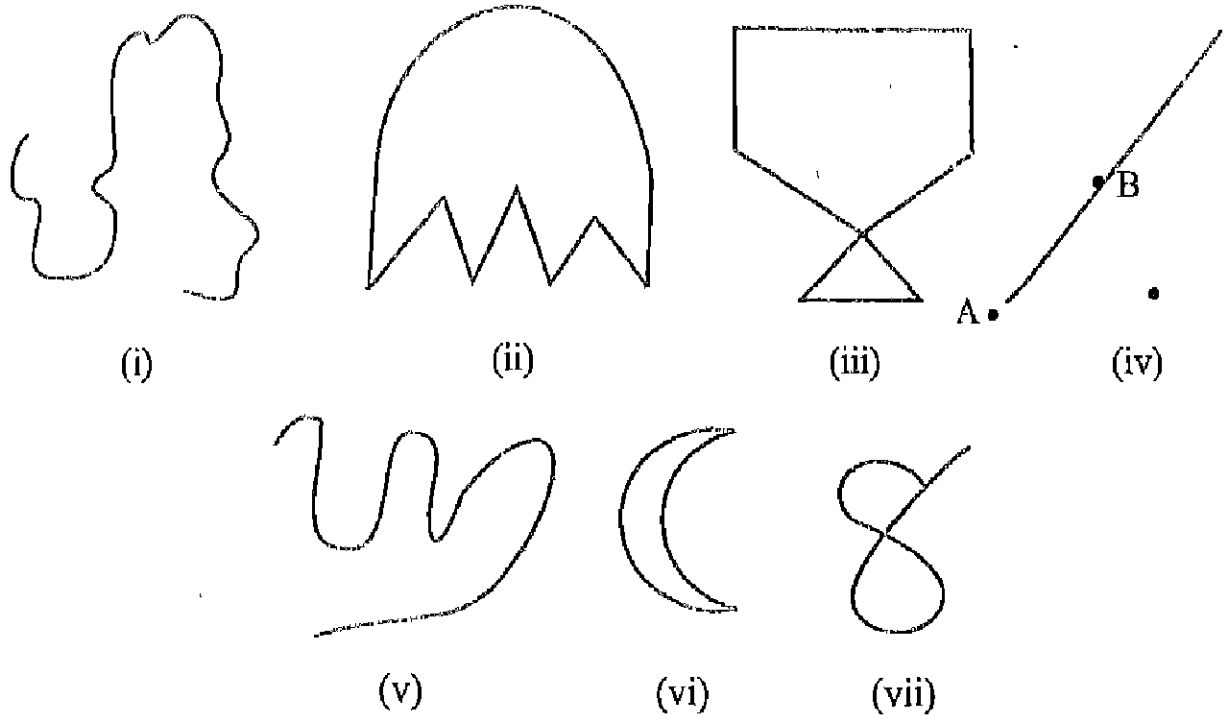
(j) O किरण $\overrightarrow{OP}$ का प्रारंभिक बिंदु नहीं है।

(k) N किरण $\overrightarrow{NP}$ और $\overrightarrow{NM}$ का प्रारंभिक बिंदु है।

4.8 वक्र

क्या आपने कभी कागज़ पर पेंसिल से टेढ़ी-मेढ़ी रेखाएँ खींची हैं। ऐसा करने पर जो आकृतियाँ प्राप्त होती हैं वे वक्र (curves) कहलाते हैं।

इनमें से कुछ आकृतियों (drawing) को आप कागज़ पर बिना पेंसिल उठाए और रूलर का प्रयोग किए बना सकते हैं। ये सभी आकृतियाँ वक्र हैं (आकृति 4.10)।



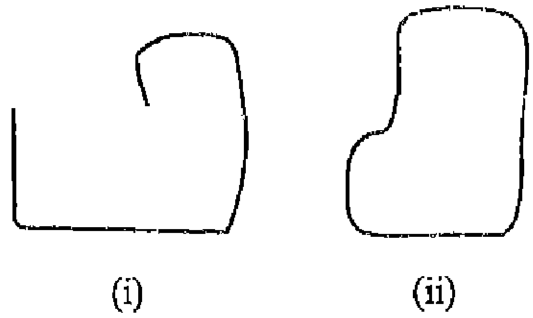
आकृति 4.10

आम भाषा में 'वक्र' का अर्थ होता है 'सीधा नहीं'। गणित में वक्र सीधी भी हो सकती है, जैसा कि ऊपर [(आकृति 4.10 (iv)] में दर्शाया गया है।

ध्यान दीजिए कि आकृति 4.10 में वक्र (iii) और (vii) स्वयं अपने को काट रही हैं, जबकि (i), (ii), (v) और (vi) में वक्र स्वयं को नहीं काटते हैं। यदि कोई वक्र स्वयं को न काटे, तो वह सरल वक्र (Simple Curves) कहलाती हैं।

पाँच, सरल वक्र बनाइए और पाँच वक्र बनाइए जो सरल न हों।

अब इन्हें देखें (आकृति 4.11)



आकृति 4.11

संलग्न आकृति (आकृति 4.11) में दी हुई दोनों वक्रों में क्या अंतर है? (i) में दी पहली, (अर्थात् आकृति 4.11 (i) वक्र की खुली (Open Curve) है, और दूसरी (अर्थात् आकृति 4.11 (ii) वक्र एक बंद वक्र (Closed Curve) है। क्या आप आकृति 4.10 (i), (ii), (v) और (vi) में, बंद वक्र और खुली वक्र बता सकते हैं?

एक आकृति में स्थितियाँ

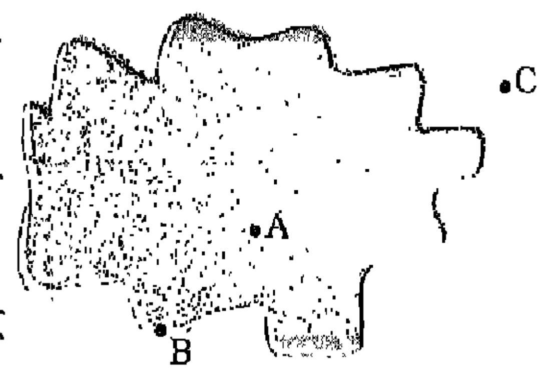
एक टेनिस कोर्ट (Tennis Court) में कोर्ट रेखा उसे तीन भागों में बाँटती है। ये भाग हैं : रेखा के एक ओर, रेखा पर और रेखा के दूसरी ओर। आप एक ओर से दूसरी ओर बिना रेखा को पार किए नहीं जा सकते हैं।

आपके घर की परिसीमा (Boundary) घर को सड़क से अलग करती है। आप परिसर के 'अंदर', बाड़े की 'परिसीमा' और परिसर के 'बाहर' की बात करते हैं। इसी प्रकार, एक बंद वक्र से संबंधित तीन भाग होते हैं, जो एक-दूसरे से पृथक (अलग-अलग) होते हैं।

(i) वक्र का अभ्यंतर (interior) (अंदर का भाग)

(ii) वक्र की परिसीमा (boundary) (वक्र पर)

(iii) वक्र का बहिर्भाग (exterior) (बाहर का भाग)



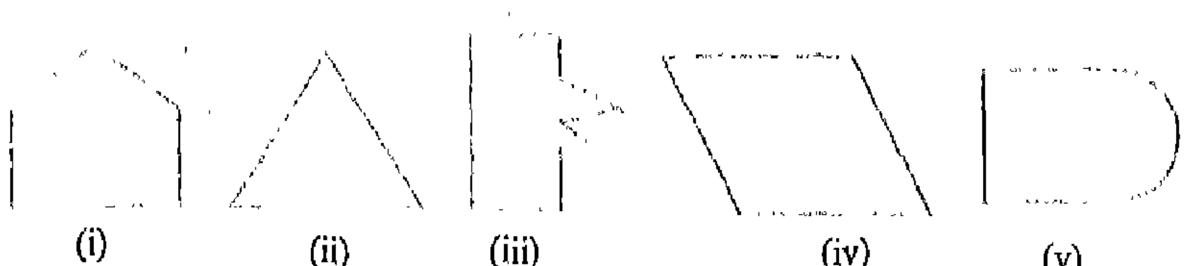
आकृति 4.12

सम्मुख आकृति 4.12 में, A वक्र के अभ्यंतर में है, C उसके बहिर्भाग में है और B स्वयं वक्र की परिसीमा पर स्थित है।

वक्र के अभ्यंतर और उसकी परिसीमा को मिलाकर उस वक्र का **क्षेत्र** **(region)** कहा जाता है। जो आपने बंद वक्र खींचा है, उसमें तीन क्षेत्रों को दर्शाया गया है।

बहुभुज

नीचे दी हुई आकृतियों 4.13 (i), (ii), (iii), (iv) और (v) को देखिए :



आकृति 4.13

आप इनके बारे में क्या कह सकते हैं? क्या ये बंद आकृतियाँ (वक्र) हैं? यह एक दूसरे से किस प्रकार भिन्न हैं? आकृति 4.13 (i), (ii), (iii) और (iv) में कुछ विशेषता हैं। यह केवल रेखाखंडों से ही बनी हैं। ऐसी आकृतियाँ **बहुभुज (polygons)** कहलाती हैं।

अतः, एक आकृति बहुभुज होती है, जब वह एक सरल बंद आकृति हो और केवल रेखाखंडों से ही बनी हो। दस अलग-अलग आकृतियों वाले बहुभुज बनाइए

इन्हें कीजिए

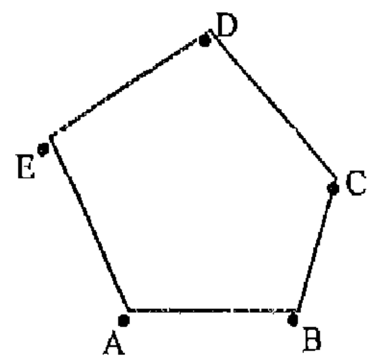
निम्न की सहायता से एक बहुभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए।

1. माचिस की पाँच तीलियाँ
2. माचिस की चार तीलियाँ
3. माचिस की तीन तीलियाँ
4. माचिस की दो तीलियाँ

उपरोक्त में से किस स्थिति में यह संभव नहीं हुआ? क्यों?

भुजाएँ, शीर्ष और विकर्ण

संलग्न आकृति 4.14 को देखिए। इसको बहुभुज कहने के लिए कुछ कारण दीजिए। एक बहुभुज को बनाने वाले रेखाखंड उसकी ***भुजाएँ (sides)*** कहलाती हैं।



आकृति 4.14

बहुभुज ABCDE की भुजाओं के नाम क्या हैं? (ध्यान दीजिए कि कोनों (corners) को किस क्रम में लेकर बहुभुज का नाम लिखा गया है।)

इसकी भुजाएँ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ आर $\overline{EA}$ हैं।

दो भुजाएँ जहाँ मिलती हैं उस बिंदु को बहुभुज का शीर्ष (*vertex*) कहते हैं।

भुजाएँ $\overline{AE}$ और $\overline{ED}$ बिंदु E पर मिलती हैं, इसलिए E बहुभुज ABCDE का एक शीर्ष है। B और C इसके अन्य दो शीर्ष हैं। क्या आप इन बिंदुओं पर मिलने वाली भुजाओं के नाम लिख सकते हैं?

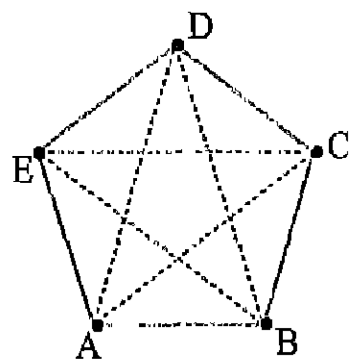
क्या आप उपरोक्त बहुभुज ABCDE के अन्य शीर्षों के नाम लिख सकते हैं?

कोई भी दो भुजाएँ जिनमें एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु (common end point) हो बहुभुज की **आसन्न भुजाएँ (adjacent sides)** कहलाती हैं।

क्या AB और BC आसन्न भुजाएँ हैं? AE और DC के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

बहुभुज की एक ही भुजा के अंत बिंदु **आसन्न शीर्ष (adjacent vertices)** कहलाते हैं। शीर्ष E और D आसन्न शीर्ष हैं, जबकि शीर्ष A और D आसन्न शीर्ष नहीं हैं। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों?

उन शीर्षों को लीजिए जो आसन्न नहीं हैं। ऐसे शीर्षों को मिलाने से बने रेखाखंड बहुभुज के **विकर्ण (diagonals)** कहलाते हैं।



आकृति 4.15

संलग्न आकृति में, रेखाखंड $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ और $\overline{CE}$ बहुभुज के विकर्ण हैं।

क्या रेखाखंड $\overline{BC}$ एक विकर्ण है? क्यों या क्यों नहीं?

क्या आप आसन्न शीर्षों को जोड़कर विकर्ण प्राप्त कर सकते हैं।

आकृति ABCDE (आकृति 4.15) के सभी भुजाओं, आसन्न भुजाओं और आसन्न शीर्षों के नाम लिखिए।

एक बहुभुज ABCDEFGH बनाइए और उसके सभी भुजाओं, आसन्न भुजाओं तथा शीर्षों सहित विकर्णों के नाम लिखिए।

प्रश्नावली 4.2

1. नीचे दी हुई वक्रों को (i) खुली या (ii) बंद वक्रों के रूप में वर्गीकृत कीजिए:



(a) (b) (c)



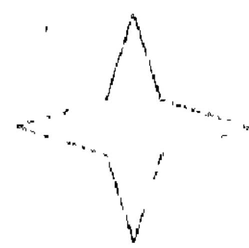
(d) (e)

2. निम्न को स्पष्ट करने के लिए रफ आकृतियाँ बनाइए :

 (a) खुली वक्र (b) बंद वक्र

3. कोई भी बहुभुज खींचिए और उसके अभ्यंतर को छायांकित (shade) कीजिए।

4. संलग्न आकृति को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :



 (a) क्या यह एक वक्र है?

 (b) क्या यह बंद है?

5. रफ आकृतियाँ बनाकर, यदि संभव हो तो निम्न को स्पष्ट कीजिए :

 (a) एक बंद वक्र जो बहुभुज नहीं है।

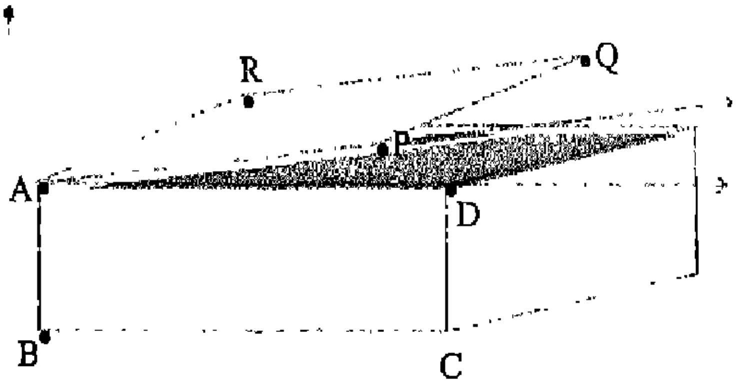
 (b) केवल रेखाखंडों से बनी हुई खुली वक्र

 (c) दो भुजाओं वाला एक बहुभुज

4.10 कोण

जब कोने (corner) बनते हैं, तो कोण (angles) भी बनते हैं।

यहाँ एक आकृति 4.16 दी है, जहाँ एक बक्स (Box) का ऊपरी सिरा कब्जा लगे एक दरवाजे की तरह है। बक्स के किनारे (edge) AD और दरवाजे के किनारे AP की दो किरणों $\overrightarrow{AD}$ और $\overrightarrow{AP}$ के रूप में कल्पना की जा सकती है। इन दोनों किरणों में एक उभयनिष्ठ अंत

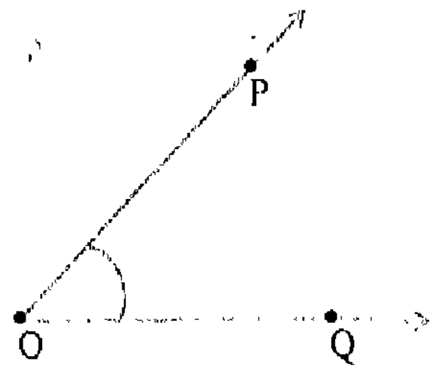


आकृति 4.16

बिंदु (या प्रारंभिक बिंदु) A है) यह कहा जाता है कि ये दो किरणें एक कोण बना रही हैं।

उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है।

कोण को बनाने वाली दोनों किरण उसकी **भुजाएँ (Arms या sides)** कहलाती हैं। उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु कोण का **शीर्ष (vertex)** कहलाता है।



आकृति 4.17

संलग्न आकृति में, किरण $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ से बने एक कोण को दर्शाया गया है। कोण को दर्शाने के लिए शीर्ष पर एक छोटे वक्र का प्रयोग किया गया है। O इस कोण का शीर्ष है। इस कोण की भुजाएँ क्या हैं? क्या ये किरणें $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ नहीं हैं?

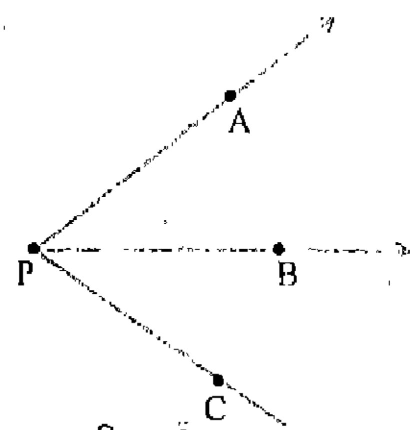
इस कोण को हम किस प्रकार नामांकित कर सकते हैं? इसे हम केवल यह कह सकते हैं कि यह O पर एक कोण है और अधिक विशिष्टता के लिए, हम कोण की दोनों भुजाओं पर एक-एक बिंदु लेकर और उसके शीर्ष को लेकर कोण का नाम लिख सकते हैं। इस प्रकार, इस कोण को कोण POQ नाम देना एक अच्छा तरीका है। हम इसे $\angle POQ$ से व्यक्त करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

संलग्न आकृति 4.18 को देखिए। इस कोण का क्या नाम है? क्या हम इसे $\angle P$ कह सकते हैं? परंतु किस कोण को $\angle P$ कहेंगे? $\angle P$ से हमारा क्या तात्पर्य है?

क्या एक कोण को केवल उसके शीर्ष द्वारा नामांकित करना यहाँ सहायक होगा? क्यों नहीं?

$\angle P$ का अर्थ यहाँ $\angle APB$ या $\angle CPB$ या $\angle APC$ हो सकता है। इसलिए यहाँ और अधिक सूचना की आवश्यकता है।

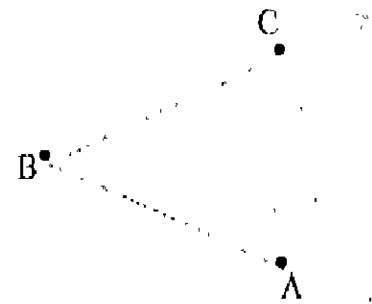


आकृति 4.18

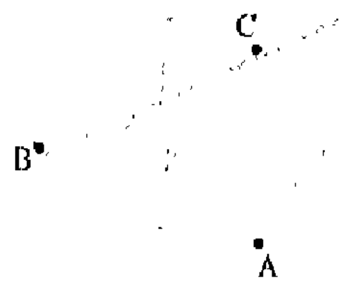
ध्यान दीजिए कि कोण को लिखते समय उसके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखा जाता है।

इन्हें कीजिए

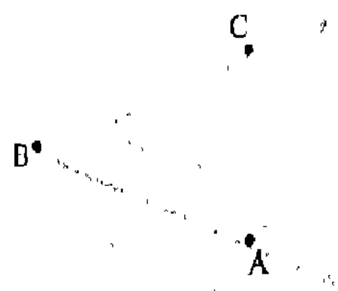
कोई कोण, मान लीजिए, ∠ABC लीजिए।



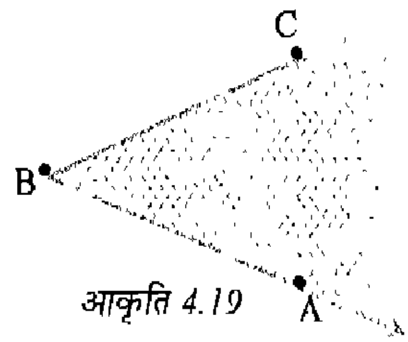
$\overrightarrow{BA}$ को परिसीमा लेकर उस भाग को छायांकित कीजिए जिस ओर $\overrightarrow{BC}$ स्थित है।



अब $\overrightarrow{BC}$ को परिसीमा लेकर उस भाग को दूसरे रंग से छायांकित कीजिए जिस ओर BA स्थित है।

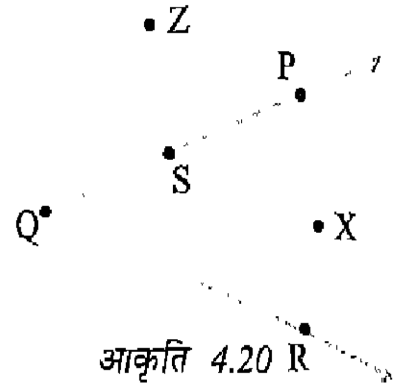


दोनों प्रकार के छायांकित भागों में उभयनिष्ठ भाग ∠ABC का अभ्यंतर है (आकृति 4.19)।
(ध्यान दें कि अभ्यंतर एक सीमित क्षेत्र नहीं है। यह अनिश्चित रूप से विस्तृत है, क्योंकि कोणों की दोनों भुजाएँ अनिश्चित रूप से अपनी-अपनी एक ओर विस्तृत हैं)।



आकृति 4.19

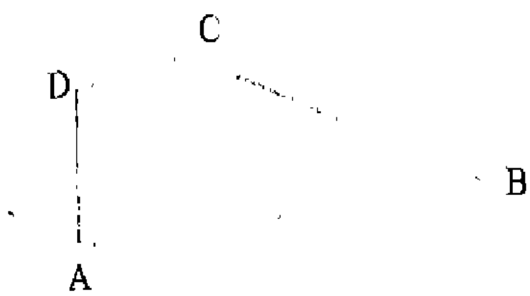
संलग्न आकृति 4.20 में, X कोण के अभ्यंतर में स्थित है। Z कोण के अभ्यंतर में स्थित नहीं है। यह कोण के बहिर्भाग में स्थित है। बिंदु S स्वयं ∠PQR पर स्थित है। अत: कोण से संबंधित भी तीन क्षेत्र होते हैं।



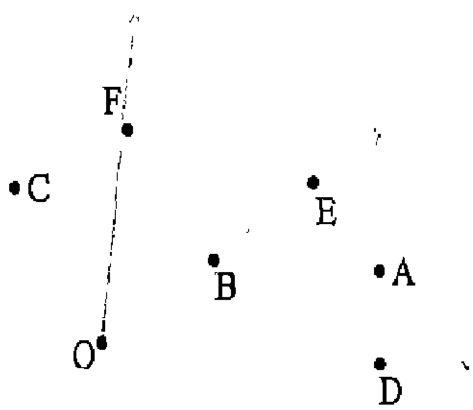
आकृति 4.20

प्रश्नावली 4.3

1. नीचे दी आकृति में, कोणों के नाम लिखिए :



2. संलग्न आकृति में, वे बिंदु लिखिए जो
   (a) ∠DOE के अभ्यंतर में स्थित हैं।
   (b) ∠EOF के बहिर्भाग में स्थित हैं।
   (c) ∠EOF पर स्थित हैं।

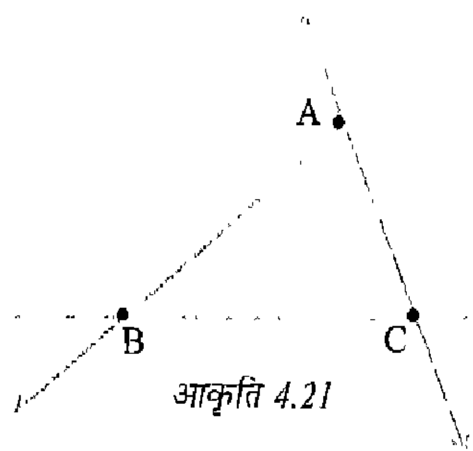


3 दो कोणों की रफ आकृतियाँ खींचिए जिससे
   (a) उनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ हो।
   (b) उनमें दो बिंदु उभयनिष्ठ हों।
   (c) उनमें तीन बिंदु उभयनिष्ठ हों।
   (d) उनमें चार बिंदु उभयनिष्ठ हों।
   (e) उनमें एक किरण उभयनिष्ठ हो।

4.11 त्रिभुज

त्रिभुज (triangle) एक तीन भुजाओं वाला बहुभुज होता है। वास्तव में, यह सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।

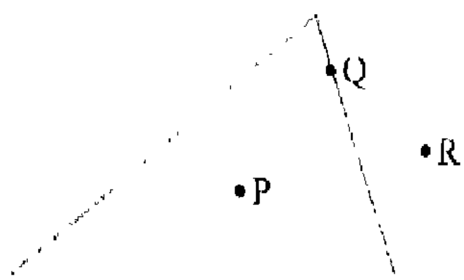
संलग्न आकृति 4.21 में दिए त्रिभुज को देखिए। हम त्रिभुज ABC के लिए सांकेतिक रूप से ΔABC लिखते हैं। ΔABC में कितनी भुजाएँ हैं? इसमें कितने कोण हैं?



आकृति 4.21

इस त्रिभुज की तीन भुजाएँ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ हैं। इसके तीन कोण हैं : $\angle BAC$, $\angle BCA$ और $\angle ABC$। बिंदु A,B और C इस त्रिभुज के शीर्ष कहलाते हैं।

एक बहुभुज होने के कारण, एक त्रिभुज का एक बहिर्भाग और एक अभ्यंतर होता है। संलग्न आकृति 4.22 में, P त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है, R त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित है और Q स्वयं त्रिभुज पर स्थित है।

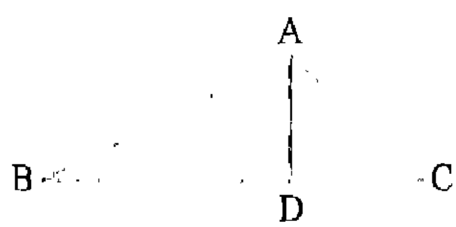


आकृति 4.22

प्रश्नावली 4.1

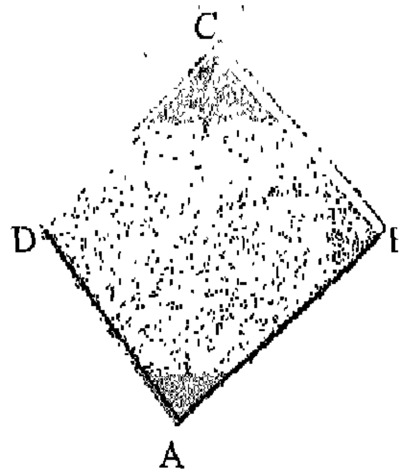
1. त्रिभुज ABC का एक रफ चित्र खींचिए। इस त्रिभुज के अभ्यंतर में एक बिंदु P अंकित कीजिए और और उसके बहिर्भाग में एक बिंदु Q अंकित कीजिए। बिंदु A इसके अभ्यंतर में स्थित है या बहिर्भाग में स्थित है?

2. (a) संलग्न आकृति में तीन त्रिभुजों की पहचान कीजिए। (b) सात कोणों के नाम लिखिए। (c) इसी आकृति में छः रेखाखंडों के नाम लिखिए। (d) किन दो त्रिभुजों में $\angle B$ उभयनिष्ठ है?



चतुर्भुज

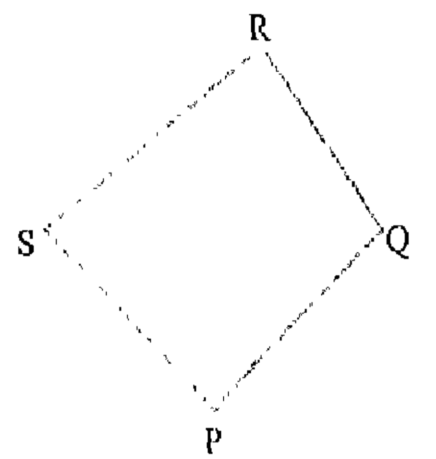
चार भुजाओं वाला बहुभुज एक **चतुर्भुज** (**Quadrilateral**) कहलाता है। इसकी चार भुजाएँ और चार कोण होते हैं। एक त्रिभुज की ही तरह, आप इसके अभ्यंतर को देख सकते हैं।



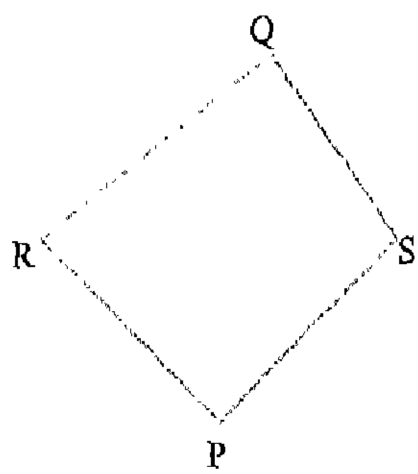
आकृति 4.23

उस विधि को देखिए जिस क्रम में चतुर्भुज के शीर्षों के नाम लिखे जाते हैं।

चतुर्भुज ABCD (आकृति 4.23) की चार भुजाएँ



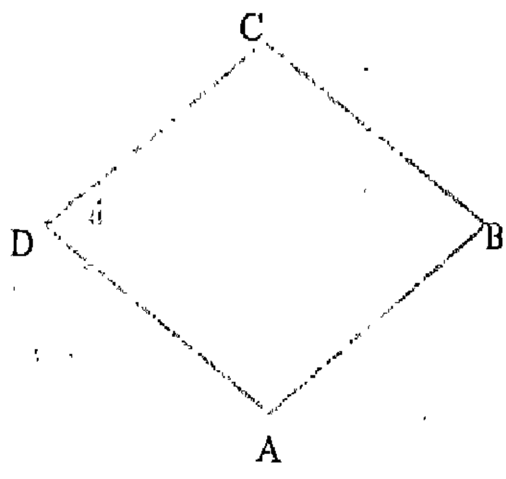
यह चतुर्भुज PQRS है।



क्या यह चतुर्भुज PQRS है?

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ और $\overline{DA}$ हैं। इसके चार कोण हैं ; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$।

किसी चतुर्भुज ABCD में, $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ आसन्न भुजाएँ हैं। क्या आप **आसन्न भुजाओं** के अन्य युग्म लिख सकते हैं?



इस चतुर्भुज में, $\overline{AB}$ और $\overline{DC}$ **सम्मुख भुजाएँ** (**Opposite sides**) हैं। सम्मुख भुजाओं के अन्य युग्म के नाम लिखिए।

$\angle A$ और $\angle C$ चतुर्भुज ABCD के **सम्मुख कोण** (**Opposite angles**) कहलाते हैं। इसी

प्रकार, ∠D और ∠B भी सम्मुख कोण हैं। स्वाभाविक है कि ∠A और ∠B **आसन्न कोण (adjacent angles)** हैं। अब आप आसन्न कोणों के अन्य युग्म लिख सकते हैं।

प्रश्नावली 4.5

1. चतुर्भुज PQRS का एक रफ चित्र खींचिए। इसके विकर्ण खींचिए। इनके नाम लिखिए। क्या विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु चतुर्भुज के अभ्यंतर में स्थित है या बहिर्भाग में स्थित है?
2. चतुर्भुज KLMN का एक रफ चित्र खींचिए। बताइए:
   (a) सम्मुख भुजाओं के दो युग्म
   (b) सम्मुख कोणों के दो युग्म
   (c) आसन्न भुजाओं के दो युग्म
   (d) आसन्न कोणों के दो युग्म
3. **खोज कीजिए :**
   पट्टियाँ और उन्हें बाँधने की वस्तुएँ लेकर एक त्रिभुज बनाइए और एक चतुर्भुज बनाइए। त्रिभुज के किसी एक शीर्ष पर पट्टियों को अंदर की ओर दबाने का प्रयत्न कीजिए। यही कार्य चतुर्भुज के लिए भी कीजिए। क्या त्रिभुज में कोई परिवर्तन आया? क्या चतुर्भुज में कोई परिवर्तन हुआ? क्या त्रिभुज एक दृढ़ (rigid) आकृति है? क्या कारण है कि विद्युत टावरों (Electric Towers) जैसी संरचनाओं में त्रिभुजीय आकारों का प्रयोग किया जाता है, चतुर्भुजीय आकारों का नहीं?

4.13 वृत्त

आप अपने पर्यावरण में अनेक वस्तुएँ पाएँगे जो गोल होती हैं, जैसे पहिया, चूड़ी, सिक्का, इत्यादि। हम गोल आकृतियों का अनेक प्रकार से प्रयोग करते हैं। एक भारी इस्पात की ट्यूब को खींचने की अपेक्षा लुढ़काना अधिक सरल होता है।

वृत्त (circle) एक सरल बंद वक्र है जो एक बहुभुज नहीं है। इसके कुछ विशिष्ट गुण हैं।

इन्हें कीजिए

- एक चूड़ी या कोई और गोल वस्तु को कागज़ पर रखिए और उसके चारों ओर पेंसिल घुमाकर एक वृत्ताकार आकृति बनाइए।



- यदि आपको एक वृत्ताकार बाग बनाना हो, तो आप कैसे करेंगे?

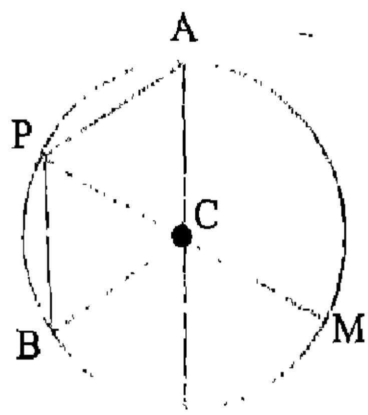
दो डंडी और एक डोरी लीजिए। भूमि पर एक डंडी को गाड़ दीजिए। यह खींचे जाने वाले वृत्त का केन्द्र (centre) है। डोरी के प्रत्येक सिरे पर एक फंदा (loop) बनाकर दो फंदे प्राप्त कीजिए। एक फंदे को केंद्र वाली पहली डंडी में डाल दीजिए और दूसरे फंदे को दूसरी डंडी में डाल दीजिए। इन डंडियों को भूमि के ऊर्ध्वाधर रखिए। डोरी को तनी हुई रखते हुए, भूमि पर दूसरी डंडी को घुमाकर एक पथ बनाइए। आप एक वृत्त (circle) प्राप्त करेंगे।

स्वाभाविक है कि वृत्त पर स्थित प्रत्येक बिंदु केंद्र से बराबर (या समान) दूरी पर है।

वृत्त के भाग

संलग्न आकृति 4.24 में केंद्र C वाला एक वृत्त है।

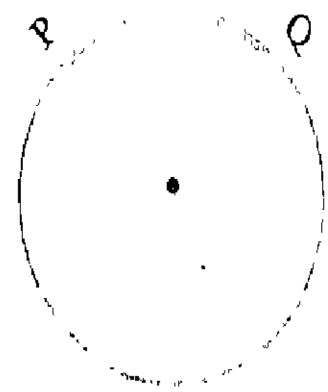
A,P,B,M वृत्त पर स्थित कुछ बिंदु हैं। आप देखेंगे कि CA = CB = CP = CM है।



चित्र 4.24

प्रत्येक रेखाखंड $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CP}$ या $\overline{CM}$ वृत्त की एक **त्रिज्या (radius)** है। त्रिज्या वह रेखाखंड होता है जो वृत्त पर स्थित बिंदु को उसके केंद्र से जोड़ता है। इसी आकृति में $\overline{CP}$ और $\overline{CM}$ ऐसी त्रिज्याएँ हैं कि बिंदु P, C, M एक ही रेखा में हैं। रेखाखंड $\overline{PM}$ वृत्त का एक **व्यास (diameter)**

कहलाता है। क्या वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दोगुना है? हाँ। वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की एक **जीवा** (**chord**) कहलाती है।

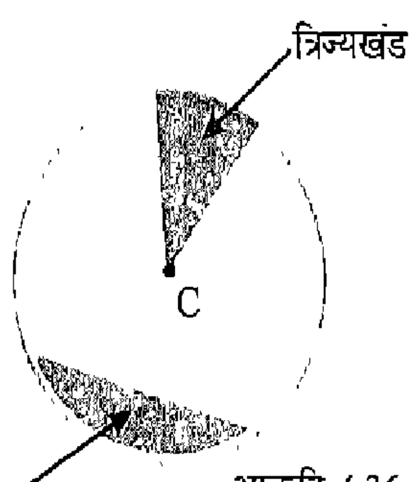


आकृति 4.25

इस प्रकार $\overline{PB}$ वृत्त की एक जीवा है। क्या $\overline{PM}$ भी वृत्त की जीवा है?

वृत्त के एक भाग को उसका चाप (arc) कहते हैं।

यदि P और Q वृत्त पर स्थित बिंदु है, तो आपको चाप PQ प्राप्त होगा। हम इसे $\widehat{PQ}$ से व्यक्त करते हैं (आकृति 4.25)।



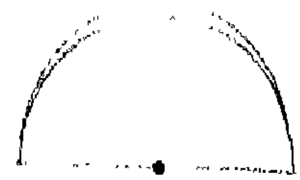
आकृति 4.26

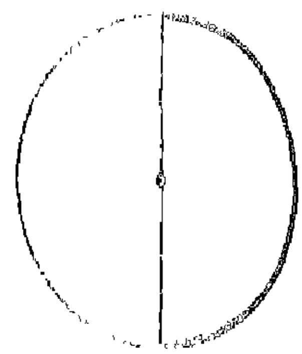
किसी सरल बंद वक्र की ही तरह, आप एक वृत्त के **अभ्यंतर** और **बहिर्भाग** के बारे में सोच सकते हैं। वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरकर बनता है एक **त्रिज्यखंड** (**sector**) कहलाता है। वृत्त की एक जीवा और संगत चाप से घिरा वृत्तीय क्षेत्र का भाग एक **वृत्तखंड** (**segment of a circle**) कहलाता है।

कोई भी वृत्ताकार वस्तु लीजिए। एक धागा लीजिए और उसे उस वस्तु के अनुदिश एक बार रखकर धागे की लंबाई को मापिए। धागे की यह लंबाई उस वस्तु के चारों ओर एक चक्कर लगाने में तय की गई दूरी है। यह लंबाई क्या व्यक्त करती है?

वृत्त के अनुदिश चली गई दूरी उसकी **परिधि** (**circumference**) कहलाती है।

इन्हें कीजिए



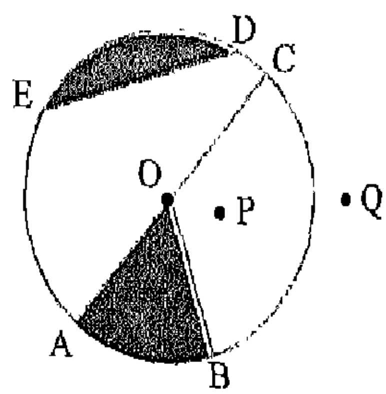


- एक वृत्ताकार शीट (sheet) लीजिए। इसे मोड़कर दो आधे भाग (halves) बनाइए। दबाकर मोड़ का निशान बनाइए और शीट को खोल लीजिए। क्या आप देखते हैं कि वृत्तीय क्षेत्र उसके व्यास द्वारा दो आधे (बराबर) भागों में विभाजित हो गया है? वृत्त का एक व्यास उसे दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक भाग एक **अर्धवृत्त** (**semicircle**) कहलाता है।

  एक अर्धवृत्त वृत्त का आधा भाग है। जिसमें वृत्त का व्यास (उसके अंत बिंदुओं को छोड़ कर) सम्मिलित नहीं हैं।

प्रश्नावली 4.6

1. संलग्न आकृति देखकर लिखिए :



   (a) वृत्त का केंद्र
   (b) तीन त्रिज्याएँ
   (c) एक व्यास
   (d) एक जीवा
   (e) अभ्यंतर में दो बिंदु
   (f) बहिर्भाग में एक बिंदु
   (g) एक त्रिज्यखंड
   (h) एक वृत्तखंड

2. (a) क्या वृत्त का प्रत्येक व्यास उसकी एक जीवा भी होता है?
   (b) क्या वृत्त की प्रत्येक जीवा उसका एक व्यास भी होती है?

3. कोई वृत्त खींचिए और निम्न को अंकित कीजिए :
   (a) उसका केंद्र (e) एक वृत्तखंड

(b) एक त्रिज्या (f) उसके अभ्यंतर में एक बिंदु

(c) एक व्यास (g) उसके बहिर्भाग में एक बिंदु

(d) एक त्रिज्यखंड (h) एक चाप

4. सत्य या असत्य बताइए :

   (a) वृत्त के दो व्यास अवश्य ही प्रतिच्छेद करेंगे।

   (b) वृत्त का केंद्र सदैव उसके अभ्यंतर में स्थित होता है।

हमने क्या चर्चा की?

1. बिंदु एक स्थिति निर्धारित करता है। इसे सामान्यत: अंग्रेजी के बड़े अक्षर से व्यक्त किया जाता है।
2. दो बिंदुओं को जोड़ने वाला सबसे छोटा रास्ता एक रेखाखंड दर्शाता है। बिंदु A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को $\overline{AB}$ से दर्शाते हैं। $\overline{AB}$ और $\overline{BA}$ दोनों एक ही रेखाखंड को दर्शाते हैं।
3. जब एक रेखाखंड जैसे $\overline{AB}$ को दोनों तरफ बिना किसी अंत के विस्तृत किया जाता है तो हमें एक रेखा प्राप्त होती है। इसे $\overleftrightarrow{AB}$ से व्यक्त किया जाता है। इसे कभी-कभी l जैसे अक्षर से भी व्यक्त किया जाता है।
4. दो विभिन्न रेखाएँ जब एक दूसरे को किसी एक बिंदु पर मिलती या काटती हैं तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।
5. दो रेखाएँ जब एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात् नहीं काटती हैं, तो वे समांतर रेखाएँ कहलाती हैं।
6. किरण रेखा का एक भाग होता है जो एक बिंदु से प्रारंभ होकर एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होता है।
7. कागज़ से बिना पेंसिल उठाए कोई भी आकृति (सीधी या टेढ़ी) को एक वक्र कह सकते हैं। इस संदर्भ में एक रेखा भी एक वक्र है।
8. यदि कोई वक्र स्वयं को न काटे तो वह सरल वक्र (Simple Curve) कहलाती है।
9. एक वक्र जिसके सिरे मिले हुए हों, बंद वक्र कहलाती है; अन्यथा उसे खुली वक्र कहते हैं।

10. रेखाखंडों से बनी बंद आकृति एक बहुभुज कहलाती है। यहाँ

   (i) बहुभुज को बनाने वाले रेखाखंड उसकी भुजाएँ कहलाती हैं।

   (ii) कोई भी दो भुजाएँ जिनमें एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु हो, बहुभुज की आसन्न भुजाएँ कहलाती हैं।

   (iii) दो भुजाएँ जहाँ मिलती हैं उस बिंदु को बहुभुज का शीर्ष (vertex) कहते हैं।

   (iv) बहुभुज की एक ही भुजा के अंत बिंदु आसन्न शीर्ष (adjacent vertice) कहलाते हैं।

   (v) ऐसे शीर्ष जो आसन्न नहीं हैं को मिलाने से बना रेखाखंड बहुभुज का विकर्ण (diagonal) कहलाता है।

11. उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है।

   दो किरणे $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ कोण $\angle AOB$ बनाती हैं (इसे $\angle BOA$ भी लिख सकते हैं)। कोण से संबंधित तीन क्षेत्र हैं :

   कोण पर, कोण के अभ्यंतर और कोण के बहिर्भाग।

12. त्रिभुज (Triangle) एक तीन भुजाओं वाला बहुभुज होता है।

13. चार भुजाओं वाला बहुभुज एक चतुर्भुज (Quadrilateral) कहलाता है। इसको शीर्षों के एक क्रम के अनुसार नामांकित करना चाहिए।

   किसी चतुर्भुज ABCD में, $\overline{AB}$ और $\overline{DC}$ तथा $\overline{AD}$ और $\overline{BC}$ सम्मुख भुजाओं के युग्म हैं। $\angle A$ और $\angle C$ तथा $\angle B$ और $\angle D$ सम्मुख कोणों के युग्म हैं। $\angle A$ और $\angle B$ आसन्न कोण हैं; ऐसे ही आसन्न कोणों के तीन अन्य युग्म हैं।

14. एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर चक्कर लगाने से बना बिंदुओं का पथ वृत कहलाता है।

   निश्चित बिंदु वृत्त का केंद्र कहलाता है, निश्चित दूरी (समान दूरी) त्रिज्या कहलाती है तथा वृत्त के चारों ओर चली गयी दूरी उसकी परिधि कहलाती है।

   परिधि पर किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की एक जीवा (chord) कहलाती है।

   केंद्र से होकर जाने वाली जीवा वृत्त का व्यास कहलाती है। वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरकर बनता है एक त्रिज्यखंड (sector) कहलाता है। वृत्त की एक जीवा और संगत चाप से घिरा वृत्तीय क्षेत्र का भाग एक वृत्तखंड (segment of a circle) कहलाता है। वृत्त के एक व्यास के दोनों अंत बिंदु उसे दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं। प्रत्येक भाग एक अर्धवृत्त (semicircle) कहलाता है।

अध्याय 5

[illegible]

[illegible] भूमिका

अपने आस-पास हम जो भी आकार (shapes) देखते हैं वे वक्रों या रेखाओं से बने होते हैं। हम अपने परिवेश में कोने, किनारे, तल, खुली वक्र और बंद वक्र देखते हैं। हम इन्हें रेखाखंडों, कोणों, त्रिभुजो, बहुभुजों और वृत्तों में संगठित करते हैं। हम पाते हैं कि ये विभिन्न साइज या मापों के होते हैं। आइए इनकी मापों की तुलना करने की कुछ विधियाँ विकसित करें।

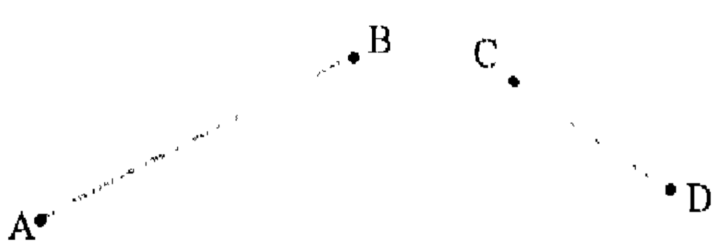
[illegible]

हमने अनेक बार रेखाखंडों को देखा और खींचा है। एक त्रिभुज तीन रेखाखंडों से बनता है। और एक चतुर्भुज चार रेखाखंडों से बनता है।

एक रेखाखंड (line segment) एक रेखा (line) का एक निश्चित भाग होता है। इससे रेखाखंड को मापना संभव हो जाता है। प्रत्येक रेखाखंड का यह माप (measure) एक अद्वितीय संख्या है, जो उसकी लंबाई (lenghts) कहलाती है। हम इस अवधारणा को रेखाखंडों की तुलना करने में प्रयोग करते हैं।

दो रेखाखंडों की तुलना करने के लिए, हम उनकी लंबाइयों के बीच एक संबंध ज्ञात करते हैं। ऐसा अनेक विधियों से किया जा सकता है।

(i) देखकर तुलना



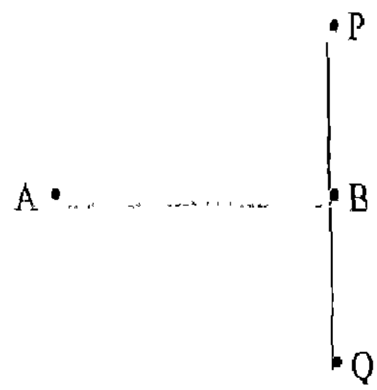
केवल देखकर ही क्या आप बता सकते हैं कि उपरोक्त में से कौन सा रेखाखंड बड़ा है?

आप देख सकते हैं कि रेखाखंड $\overline{AB}$ बड़ा है।

परंतु आप अपने सामान्य निर्णय के बारे में सदैव निश्चित नहीं हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, निम्नलिखित रेखाखंडों को देखिए :



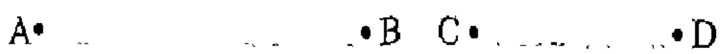
इन दोनों रेखाखंडों की लंबाइयों का अंतर इतना स्पष्ट नहीं है। अतः, हमें तुलना करने की अन्य विधियों की आवश्यकता है।



वास्तव में, संलग्न आकृति में, $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$ की एक ही लंबाई है। यह इतना स्पष्ट नहीं है।

इसलिए हमें रेखाखंडों की तुलना करने के लिए और अच्छी विधियों की आवश्यकता है।

(ii) **अक्स द्वारा तुलना**



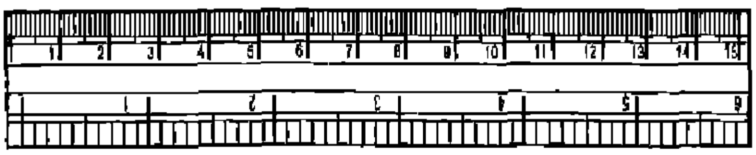
$\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ की तुलना करने के लिए, हम एक अक्स कागज (tracing paper) का प्रयोग करते हैं। हम अक्स कागज़ पर $\overline{CD}$ का अक्स खींचते हैं और इस अक्स कागज़ पर बने रेखाखंड को $\overline{AB}$ पर रखते हैं।

क्या अब आप बता सकते हैं कि $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ में से कौन बड़ा है?

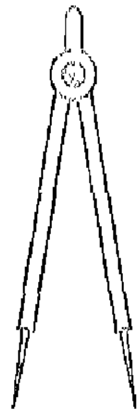
यह विधि इस बात पर निर्भर करती है कि हम रेखाखंड का अक्स कितनी शुद्धता से खींचते हैं। इसके अतिरिक्त, यदि आपको किसी और रेखाखंड से तुलना करनी हो, तो उस अन्य रेखाखंड का भी अक्स खींचना पड़ेगा। यह कठिन है, क्योंकि जब रेखाखंडों की तुलना करनी हो, तो आप सदैव रेखाखंड का अक्स ही नहीं रहेंगे।

(iii) रूलर और डिवाइडर द्वारा तुलना

क्या आप अपने ज्यामिति बक्स में रखी वस्तुओं को पहचानते हैं? अन्य वस्तुओं के अतिरिक्त इनमें एक रूलर (ruler) और एक डिवाइडर भी है।



रूलर



डिवाइडर

ध्यान दीजिए कि रूलर पर चिह्न किस प्रकार अंकित हैं। यह 15 बराबर भागों में विभाजित है। प्रत्येक भाग की लंबाई 1 सेमी है।

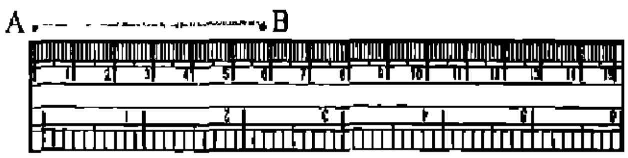
इनमें से प्रत्येक भाग को आगे और उपविभाजित (sub divide) किया गया है। कैसे? इस प्रकार उपविभाजित प्रत्येक भाग की लंबाई क्या है?

प्रत्येक सेंटीमीटर को दस बराबर भागों में उपविभाजित किया गया है। 1 सेमी का प्रत्येक उपविभाजित भाग 1 मिमी है।

कितने मिलीमीटरों से एक सेंटीमीटर बनता है? 1 सेमी = 10 मिमी होता है तो हम 2 सेमी और 3 किमी को कैसे लिखेंगे? 7.7 सेमी का क्या अर्थ है?

> 1 मिमी 0.1 सेमी होता है, 2 मिमी 0.2 सेमी होता है, इत्यादि 2.3 सेमी का अर्थ होगा 2 सेमी और 3 मिमी

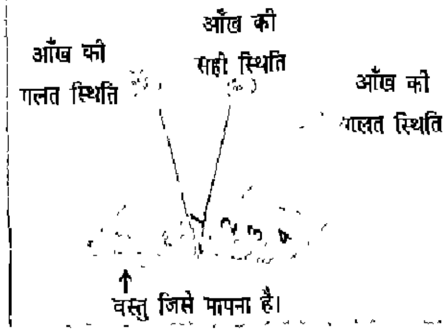
मान लीजिए रेखाखंड AB की लंबाई मापनी है। रूलर के शून्य चिह्न को A पर रखिए। B के सम्मुख चिह्न को रूलर पर पढ़िए। इससे रेखाखंड $\overline{AB}$ की लंबाई ज्ञात हो जाएगी। मान लीजिए यह लंबाई 5.8 सेमी है। हम इसे लंबाई AB = 5.8 सेमी लिख सकते हैं या केवल AB = 5.8 सेमी लिख सकते हैं।



इस प्रक्रिया में भी त्रुटि की संभावना रहती है। रूलर की मोटाई के कारण उस पर अंकित चिह्नों को पढ़ने में कठिनाई हो सकती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. अन्य कौन-सी त्रुटियाँ और कठिनाइयाँ हमारे सम्मुख आ सकती हैं?
2. यदि रूलर पर अंकित चिह्नों को ठीक प्रकार से न पढ़ा जाए, तो किस प्रकार की त्रुटियाँ हो सकती हैं? इनसे कैसे बचा जा सकता है?

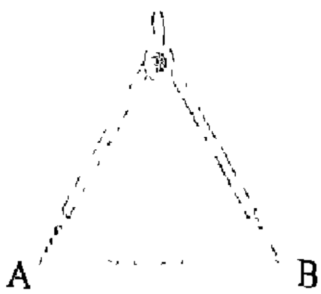


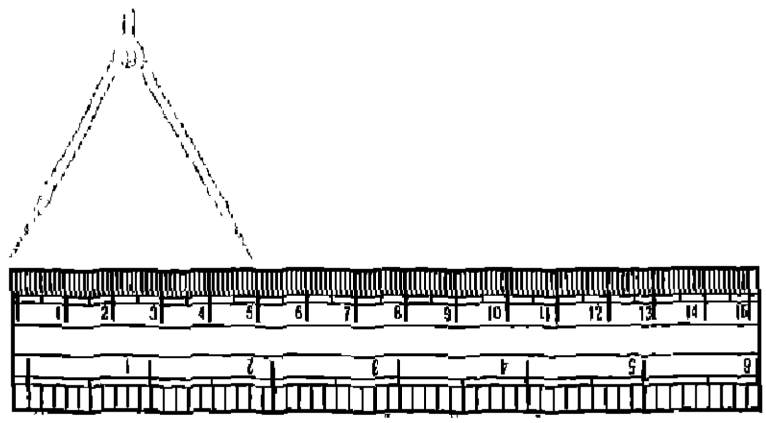
स्थिति के कारण त्रुटि

सही माप लेने के लिए आँख की स्थिति सही होनी चाहिए।। आँख को चिह्न के ठीक ऊपर रखा जाए। अन्यथा तिरछा देखने पर त्रुटि हो सकती है।

क्या हम इस समस्या से बच सकते हैं? क्या इससे और कोई अच्छी विधि है? आइए लंबाई मापने के लिए डिवाइडर (divider) का प्रयोग करें।

डिवाइडर को खोलिए। इसकी एक भुजा के अंतबिंदु को A पर रखिए और दूसरी भुजा के अंतबिंदु को B पर रखिए। इस फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए, डिवाइडर को रूलर पर इस प्रकार रखिए कि एक अंतबिंदु रूलर के शून्य चिह्न पर रहे। अब दूसरे अंतबिंदु के सम्मुख चिह्न को पढ़िए। यही रेखाखंड AB की लंबाई है (नीचे दी आकृति देखिए)।





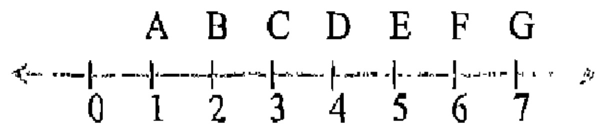
प्रयास कीजिए

1. पोस्टकार्ड लीजिए। उपरोक्त तकनीक का प्रयोग करके, इसकी दो आसन्न भुजाओं को मापिए।
2. कोई तीन वस्तुएँ चुनिए जिनके ऊपरी सिरे सपाट हों। डिवाइडर और रूलर का प्रयोग करते हुए, इन ऊपरी सिरों की सभी भुजाओं को मापिए।

प्रश्नावली 5.1

1. रेखाखंड की तुलना केवल देखकर करने से क्या हानि है?
2. एक रेखाखंड की लंबाई मापने के लिए रूलर की अपेक्षा डिवाइडर का प्रयोग करना क्यों अधिक अच्छा है?
3. कोई रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए। A और B के बीच स्थित कोई बिंदु C लीजिए। AB, BC और CA की लंबाई मापिए। क्या $AB = AC + CB$ है?

   (**टिप्पणी** : यदि किसी रेखा पर बिंदु A, B, C इस प्रकार स्थित हों कि $AC + CB = AB$ है, तो निश्चित रूप से बिंदु C बिंदु A और B के बीच स्थित होता है)।
4. एक रेखा पर बिंदु A, B और C इस प्रकार स्थित हैं कि AB = 5 सेमी, BC = 3 सेमी और AC = 8 सेमी है। इनमें से कौन-सा बिंदु अन्य दोनों बिंदुओं के बीच स्थित है?
5. जाँच कीजिए कि संलग्न आकृति में D रेखाखंड $\overline{AG}$ का मध्य-बिंदु है।



6. B रेखाखंड $\overline{AC}$ का मध्य-बिंदु है और C रेखाखंड $\overline{BD}$ का मध्य बिंदु है, जहाँ A, B, C और D एक ही रेखा पर स्थित हैं। बताइए कि $AB = CD$ क्यों है।
7. पाँच त्रिभुज खींचिए और उनकी भुजाओं को मापिए। प्रत्येक स्थिति में जाँच कीजिए कि किन्ही भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से सदैव बड़ा है।

5.3 कोण-समकोण और ऋजुकोण

आपने भूगोल (Geography) में दिशाओं के बारे में सुना है। हम जानते हैं कि चीन भारत के उत्तर में और श्रीलंका दक्षिण में है। हम यह भी जानते हैं कि सूर्य पूर्व में उदय होता है और पश्चिम में डूबता है। कुल मिलाकर चार दिशाएँ हैं। ये हैं:

उत्तर (North) (N), दक्षिण (South) (S), पूर्व (East) (E) और पश्चिम (West)(W)।

क्या आप जानते हैं कि उत्तर के विपरीत कौन-सी दिशा है?

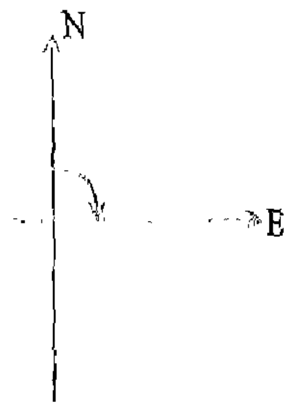
पश्चिम के विपरीत कौन-सी दिशा है?

आप पहले से जो जानते हैं उसे याद कीजिए। अब हम इस ज्ञान का प्रयोग कोणों के कुछ गुणों को सीखने में करेंगे।

इन्हें कीजिए

उत्तर की ओर मुँह करके खड़े होइए।

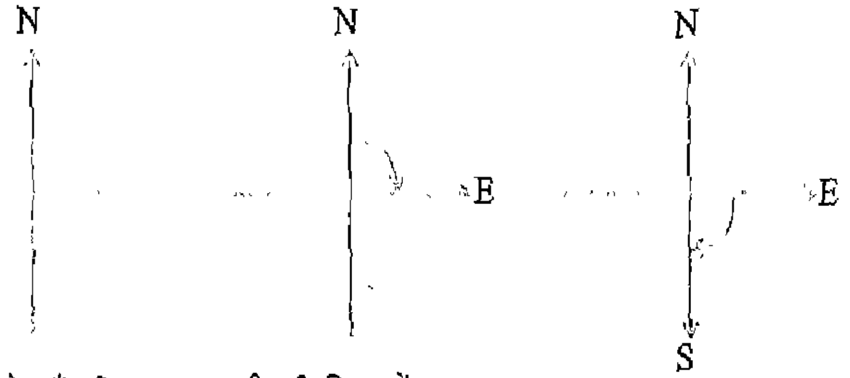
घड़ी की दिशा (दक्षिणावर्त दिशा) (clock-wise) में पूर्व की ओर घूम जाइए।



आप एक समकोण (right angle) के बराबर घूम गए हैं। घड़ी की दिशा में एक समकोण और घूमिए। अब आप दक्षिण की ओर मुँह करके खड़े हैं।

यदि आप घड़ी की विपरीत दिशा (वामावर्त दिशा) (anti clock-wise) में एक समकोण घूम जाएँ, तो आपका मुँह किस दिशा में होगा? यह पुन: पूर्व है (क्यों?)

निम्नलिखित स्थितियों को देखिए :



आप उत्तर की ओर मुँह किए खड़े हैं

घड़ी की दिशा में एक समकोण घूमने पर अब आप पूर्व की ओर मुँह किए खड़े हैं

एक अन्य समकोण घूमने पर अंत में दक्षिण की ओर मुँह किए खड़े हैं

उत्तर की ओर मुँह होने से दक्षिण की ओर मुँह होने तक घूमने में, आप दो समकोण घूम गए हैं। क्या यह दो समकोणों के एक घूर्णन के बराबर नहीं है?

उत्तर से पूर्व तक का घूमना (घूर्णन) एक समकोण के बराबर घूमना है।

उत्तर से दक्षिण तक का घूमना दो समकोणों के बराबर घूमना है।

इसे एक **ऋजुकोण** (**straight angle**) कहते हैं। NS एक सीधी रेखा है।



दक्षिण की ओर मुँह करके खड़े होइए।

एक ऋृजुकोण के बराबर घूमिए।

अब आप किस दिशा में मुँह किए खड़े हैं?

आप उत्तर दिशा की ओर मुँह किए खड़े हैं।

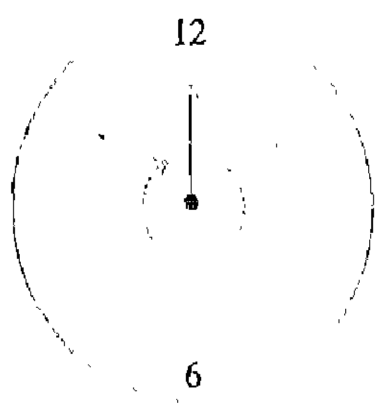


उत्तर से दक्षिण तक घूमने के लिए आप एक ऋृजुकोण के बराबर घूमे हैं। पुन: दक्षिण से उत्तर तक आने में आप एक ऋृजुकोण के बराबर घूमे हैं। इस प्रकार, दो ऋृजुकोणों के बराबर उसी दिशा में घूमने पर आप प्रारंभिक स्थिति में आ जाते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

आप अपनी प्रारंभिक स्थिति तक आने के लिए, एक ही दिशा में कितने समकोण घूमेंगे?

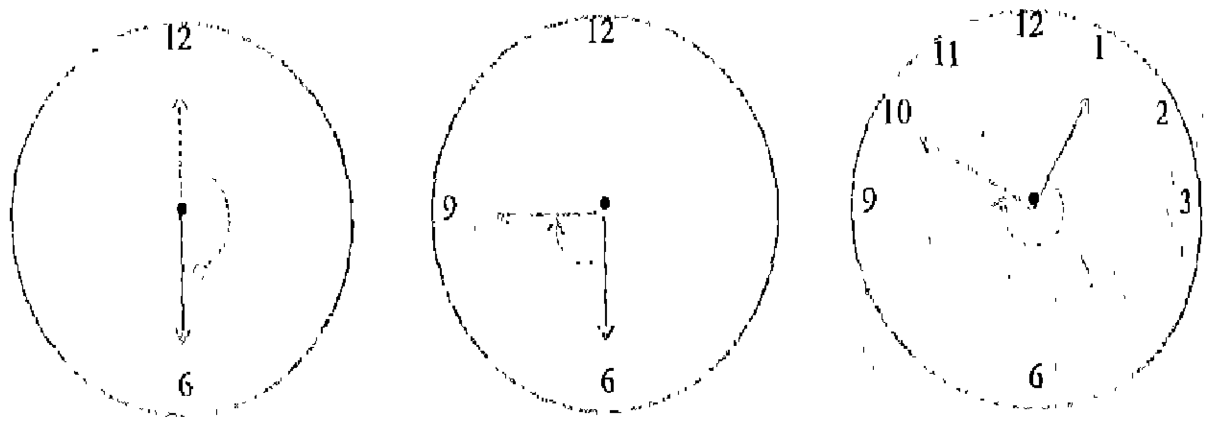
एक ही दिशा में दो ऋृजुकोण (या चार समकोण) घूमने पर एक चक्कर पूरा हो जाता है। यह एक पूरा चक्कर एक घूर्णन कहलाता है। एक घूर्णन के लिए कोण एक **संपूर्ण कोण (complete angle)** कहलाता है।



हम इन घूर्णनों (revolutions) को एक घड़ी पर देख सकते हैं। जब घड़ी की एक सुई एक स्थान से अन्य स्थान पर पहुँचती है, तो वह एक कोण (angle) पर घूम जाती है।

मान लीजिए घड़ी की एक सुई 12 से चलना प्रारंभ करके घूमती हुई 12 पर पुन:

पहुँच जाती है। क्या उसने एक घूर्णन पूरा नहीं कर लिया है? अत: उसने कितने समकोण घूम लिए हैं? इन उदाहरणों (आकृतियों) को देखिए :



12 से 6 तक
एक घूर्णन का $\frac{1}{2}$
या 2 समकोण

6 से 9 तक
एक घूर्णन का $\frac{1}{4}$
या 1 समकोण

1 से 10 तक
एक घूर्णन का $\frac{3}{4}$
या 3 समकोण

प्रयास कीजिए

1. आधे घूर्णन के लिए कोण का नाम क्या है?
2. एक-चौथाई घूर्णन के लिए कोण का नाम क्या है?
3. एक घड़ी पर आधे घूर्णन, एक चौथाई घूर्णन और तीन-चौथाई घूर्णन के लिए पाँच अन्य स्थितियाँ दीजिए।

ध्यान दीजिए कि तीन-चौथाई घूर्णन के लिए कोण का कोई विशेष नाम नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

1. घड़ी की घंटे वाली सुई एक घूर्णन के कितनी भिन्न घूम जाती है, जब वह
   (a) 3 से 9 तक पहुँचती है? (b) 4 से 7 तक पहुँचती है?
   (c) 7 से 10 तक पहुँचती है? (d) 12 से 9 तक पहुँचती है?
   (e) 1 से 10 तक पहुँचती है? (f) 6 से 3 तक पहुँचती है?

2. एक घड़ी की सुई कहाँ रुक जाएगी, यदि वह

   (a) 12 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन करे?

   (b) 2 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन करे?

   (c) 5 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{4}$ घूर्णन करे?

   (d) 5 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन करे?

3. आप किस दिशा में देख रहे होंगे यदि आप प्रारंभ में

   (a) पूर्व की ओर देख रहे हों और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन करे?

   (b) पूर्व की ओर देख रहे हों और घड़ी की दिशा में $1\frac{1}{2}$ घूर्णन करे?

   (c) पश्चिम की ओर देख रहे हों और घड़ी की विपरीत दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन करे?

   (d) दक्षिण की ओर देख रहे हों और एक घूर्णन करे?

4. आप एक घूर्णन का कितना भाग घूम जाएँगे, यदि आप

   (a) पूर्व की ओर मुख किए खड़े हों और घड़ी की दिशा में घूमकर उत्तर की ओर मुख कर लें?

   (b) दक्षिण की ओर मुख किए खड़े हों और घड़ी की दिशा में घूमकर पूर्व की ओर मुख कर लें?

   (c) पश्चिम की ओर मुख किए खड़े हों और घड़ी की दिशा में घूमकर पूर्व की ओर मुख कर लें?

5. घड़ी की घंटे की सुई द्वारा घूमे गए समकोणों की संख्या ज्ञात कीजिए, जब वह

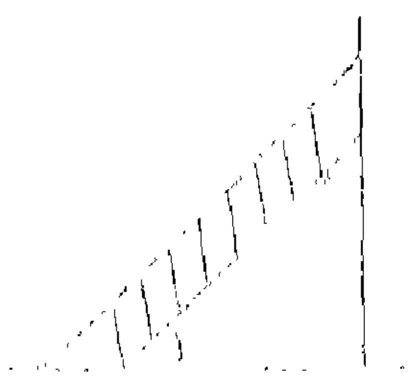
   (a) 3 से 6 तक पहुँचती है।
   (b) 2 से 8 तक पहुँचती है।
   (c) 5 से 11 तक पहुँचती है।
   (d) 10 से 1 तक पहुँचती है।
   (e) 12 से 9 तक पहुँचती है।
   (f) 12 से 6 तक पहुँचती है।

6. आप कितने समकोण घूम जाएँगे, यदि आप प्रारंभ में
   (a) दक्षिण की ओर देख रहे हों और घड़ी की दिशा में पश्चिम की ओर घूम जाएँ?
   (b) उत्तर की ओर देख रहे हों और घड़ी की विपरीत (वामावर्त) दिशा में पूर्व की ओर घूम जाएँ?
   (c) पश्चिम की ओर देख रहे हों और पश्चिम की ओर घूम जाएँ?
   (d) दक्षिण की ओर देख रहे हों और उत्तर की ओर घूम जाएँ?

7. घड़ी की घंटे वाली सुई कहाँ रुकेगी, यदि वह प्रारंभ करे
   (a) 6 से और 1 समकोण घूम जाए?
   (b) 8 से और 2 समकोण घूम जाए?
   (c) 10 से और 3 समकोण घूम जाए?
   (d) 7 से और 2 ऋजुकोण घूम जाए?

[illegible]

हमने देखा कि एक समकोण और एक ऋजुकोण का क्या अर्थ है। परंतु जो कोण हमें देखने को मिलते हैं वे सदैव इन दोनों प्रकारों के ही नहीं होते हैं। एक सीढ़ी द्वारा दीवार से (या फर्श से) बनाया गया कोण न तो समकोण है और न ही ऋजुकोण है।

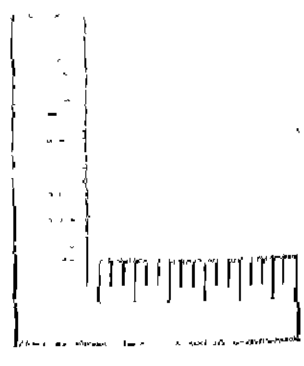


सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

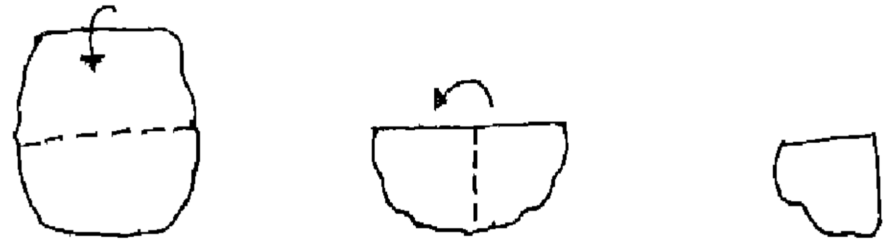
क्या कुछ ऐसे कोण हैं जो समकोण से छोटे हैं?

क्या कुछ ऐसे कोण हैं जो समकोण से बड़े हैं?

क्या आपने बढ़ई का वर्ग देखा है? यह अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षर 'L' जैसा होता है। वह इससे समकोणों की जाँच करता है। आइए हम भी समकोणों की जाँच के लिए इसी प्रकार के **'टेस्टर'** (**tester**) को बनाएँ।



इन्हें कीजिए



चरण 1	चरण 2	चरण 3
कागज़ का एक टुकड़ा लीजिए	इसे बीच से मोड़िए	सीधे किनारे पर पुनः मोड़िए। आपका टेस्टर तैयार है।

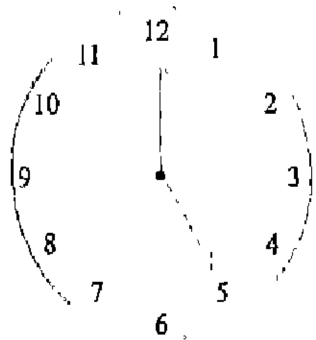
अपने द्वारा 'बनाए गए' समकोण टेस्टर को देखिए (क्या हम इसे RA टेस्टर कहें?) क्या इसका एक किनारा दूसरे पर सीधा खड़ा है?

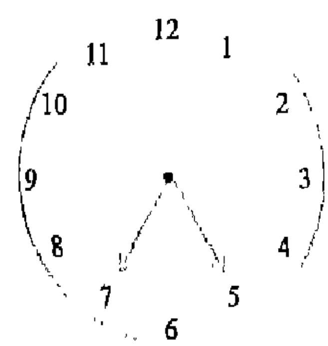
मान लीजिए कोनों वाला कोई आकार दिया हुआ है। आप इसके कोनों पर बने कोणों की जाँच RA टेस्टर द्वारा कर सकते हैं।

क्या इसके किनारे एक कागज़ के कोणों से दिखाई देते हैं? यदि हाँ, तो यह एक समकोण दर्शाता है।

प्रयास कीजिए

1. घड़ी की घंटे वाली सुई 12 से 5 तक चलती है। क्या इसका घूर्णन 1 समकोण से अधिक है?





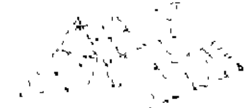
2. घड़ी पर यह कोण कैसा दिखता है? घड़ी की घंटे वाली सुई 5 से 7 तक चलती है। क्या इस सुई द्वारा घूमा गया कोण 1 समकोण से अधिक है?

3. घड़ी पर सुइयों की स्थिति निम्न प्रकार बनाकर कोणों की जाँच RA टेस्टर द्वारा कीजिए।
   (a) 12 से 2 तक जाना
   (b) 6 से 7 तक जाना
   (c) 4 से 8 तक जाना
   (d) 2 से 5 तक जाना
4. कोनों वाले पाँच भिन्न-भिन्न आकार लीजिए। कोनों के नाम लिखिए। अपने टेस्टर द्वारा इन कोणों की जाँच कीजिए और प्रत्येक स्थिति के परिणाम को एक सारणी के रूप में निम्न प्रकार लिखिए :

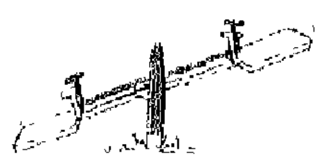
कोने	**से छोटा** 	**से बड़ा** 
A	....	....
B	....	....
C	....	....
⋮		

अन्य नाम

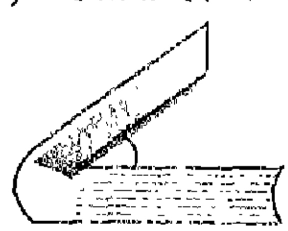
- समकोण से छोटा कोण **न्यूनकोण (acute augle)** कहलाता है। ये कोण न्यून कोण हैं :



छत का ऊपरी सिरा



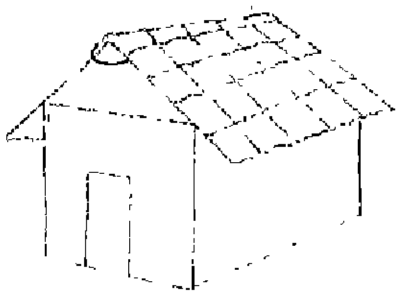
सी-साॅ (see-saw)



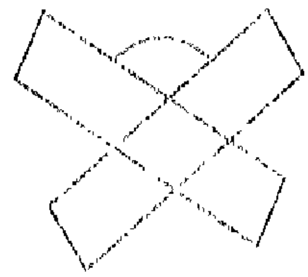
पुस्तक खोलना

क्या आप देख रहे हैं कि इनमें से प्रत्येक एक घूर्णन के एक-चौथाई से छोटा है? अपने RA टेस्टर से इनकी जाँच कीजिए।

- यदि कोई कोण एक समकोण से बड़ा और एक ऋृजुकोण से छोटा है, तो वह एक **अधिक कोण** (**obtuse angle**) कहलाता है।
  ये कोण अधिक कोण हैं :



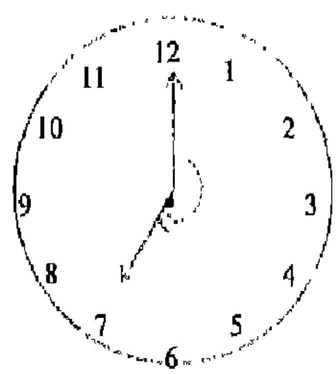
घर



पुस्तक पढ़ने की डेस्क

क्या आप देख सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक $\frac{1}{4}$ घूर्णन से अधिक है और $\frac{1}{2}$ घूर्णन से कम है? इसकी जाँच करने में आपका RA टेस्टर सहायता कर सकता है।

पिछले उदाहरणों में भी अधिक कोणों की पहचान कीजिए।



- एक **प्रतिवर्ती कोण** (**reflex angle**) एक ऋृजुकोण से बड़ा होता है और एक संपूर्ण कोण से छोटा होता है। यह इस आकृति में दर्शाए प्रकार का होता है (घड़ी पर कोण को देखिए)। आपने जो इससे पहले आकृतियाँ बनाई थीं, क्या उनमें प्रतिवर्ती कोण बने थे? आप इनकी जाँच किस प्रकार करेंगे?

प्रयास कीजिए

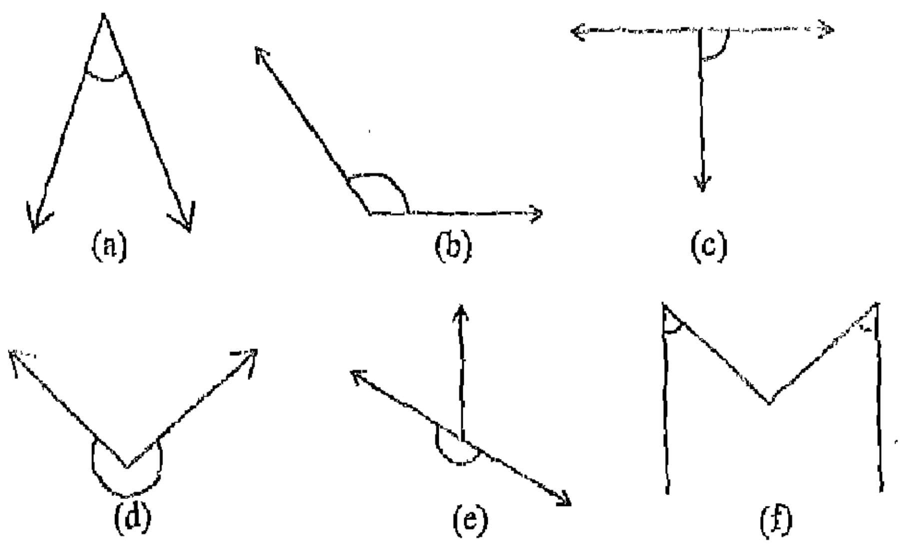
1. आप अपने आस-पास देखिए और कोनों पर मिलने वाले किनारों को पहचानिए, जो कोण बना रहे हों। ऐसी दस स्थितियाँ लिखिए।
2. ऐसी दस स्थितियाँ लिखिए, जहाँ न्यूनकोण बन रहे हों।
3. ऐसी दस स्थितियाँ लिखिए, जहाँ समकोण बन रहे हों।
4. ऐसी पाँच स्थितियाँ लिखिए, जहाँ अधिक कोण बन रहे हों।
5. ऐसी पाँच स्थितियाँ लिखिए, जहाँ प्रतिवर्ती कोण बन रहे हों।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्न को सुमेलित (match) कीजिए :

(i) ऋजुकोण	(a) $\frac{1}{4}$ घूर्णन से कम
(ii) समकोण	(b) $\frac{1}{2}$ घूर्णन से अधिक
(iii) न्यून कोण	(c) $\frac{1}{2}$ घूर्णन
(iv) अधिक कोण	(d) $\frac{1}{4}$ घूर्णन
(v) प्रतिवर्ती कोण	(e) $\frac{1}{4}$ घूर्णन और $\frac{1}{2}$ घूर्णन के बीच में
	(f) एक पूरा या संपूर्ण घूर्णन

2. निम्न में से प्रत्येक कोण को समकोण, ऋजुकोण, न्यूनकोण, अधिक कोण या प्रतिवर्ती कोण के रूप में वर्गीकृत कीजिए :



5.5 कोणों का मापन

अपने बनाए गए 'RA टेस्टर' की सहायता से, हमने कोणों की समकोण से तुलना की। इससे हम कोणों को न्यून कोण, अधिक कोण और प्रतिवर्ती कोणों में वर्गीकृत करने में भी समर्थ हो गए थे।

परंतु इससे कोणों की परिशुद्धता की तुलना नहीं हो पाती है। इससे यह पता नहीं लगता कि दिए हुए दो अधिक कोणों में कौन बड़ा है। इसलिए, कोणों की तुलना अधिक परिशुद्धता से करने के लिए यह आवश्यक है कि उन्हें 'माप' लिया जाए। ऐसा हम एक चाँदे (protractor) की सहायता से कर सकते हैं।

कोण का माप

हम अपनी इस माप को डिगरी माप (अंश माप) (degree measure) कहते हैं। एक संपूर्ण घूर्णन को 360 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक भाग एक **अंश (degree)** कहलाता है। हम तीन सौ साठ अंश कहने के लिए 360° लिखते हैं।

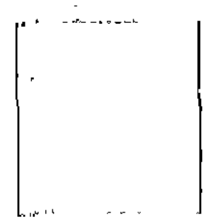
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

$\frac{1}{2}$ घूर्णन में कितनी डिगरी हैं? 1 समकोण में कितनी डिगरी हैं?

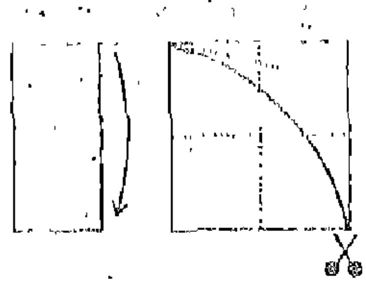
1 ऋृजुकोण में कितनी डिगरी (अंश) हैं? कितने समकोणों से 180° बनते हैं? कितने समकोणों से 360° बनते हैं?

इन्हें कीजिए

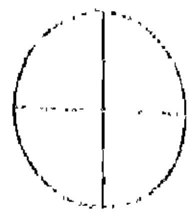
1. कागज़ की वर्गाकार शीट लीजिए।



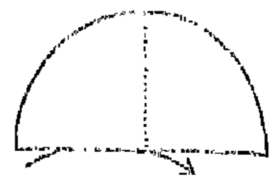
2. इस कागज़ को आकृति में दर्शाए अनुसार दो बार मोड़िए।
   (जाँच कीजिए कि इसमें दो मोड़ के निशान बन गए हैं)।



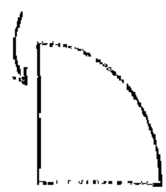
3. इस कागज़ के पृष्ठ पर आकृति में दर्शाए अनुसार एक वृत्त का भाग बनाइए और इस भाग को काट लीजिए।



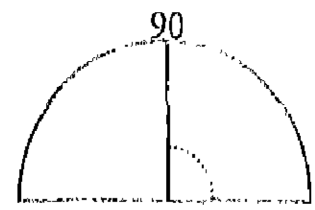
4. जब आप इसे खोलेंगे, तो आप वृत्त के दो भागों को देखेंगे या आप देखेंगे कि दो चाँदे एक दूसरे के ऊपर रखे हुए हैं।



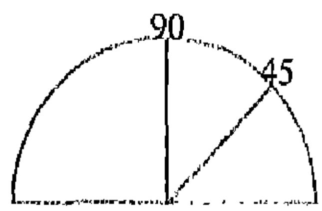
5. इनमें से एक अर्धवृत (semi-circle) या चाँदे को मोड़िए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। आप चाहें तो इन्हें काट भी सकते हैं।



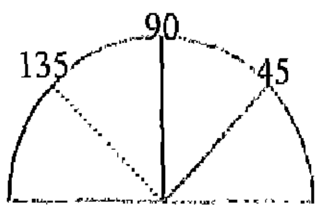
6. कागज को खोल लीजिए और मोड़ के निशान पर 90° अंकित कीजिए।



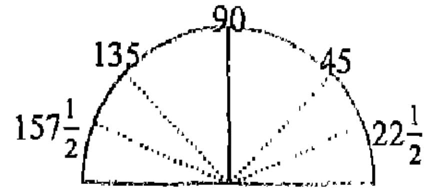
7. आकृति में दर्शाए अनुसार, इस कागज़ को 90° के आधे अर्थात 45° पर मोड़ दीजिए। मोड़ के निशान पर दाईं ओर 45° अंकित कीजिए।



8. अब उस मोड़ के निशान को पहचानिए, जो $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ माप दर्शाता है।

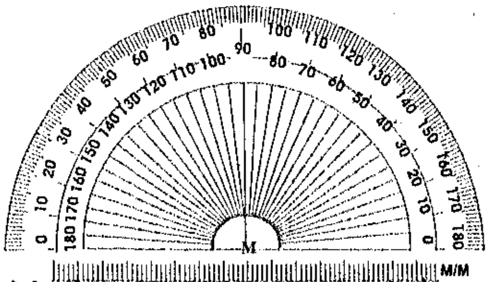


9. कागज़ को फिर मोड़िए और 45° का आधा बनाइए। अब दाईं ओर पर यह आधा कोण $45^\circ \div 2 = 22\frac{1}{2}^\circ$ है। 135° के बाईं ओर यह आधा कोण $157\frac{1}{2}^\circ$ है। अब आपके पास कोण मापने का एक यंत्र तैयार हो गया है। यह एक सन्निकिट चाँदा है।

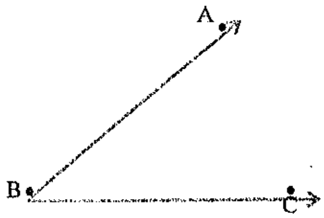


चाँदा

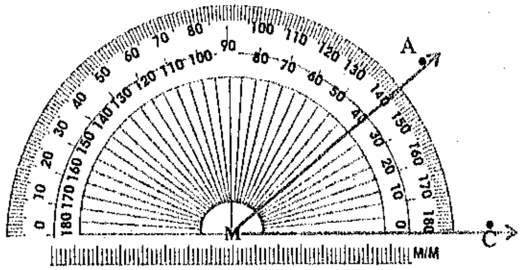
आपके ज्यामिति बक्स में आपको चाँदा बना बनाया मिल जाएगा। इसके वक्रीय किनारे (edge) को 180 बराबर भागों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक भाग एक **अंश (डिगरी) (degree)** कहलाता है। इस पर चिह्न दाईं ओर से प्रारंभ करके बाईं ओर तक 0° से 180° तक लगे होते हैं।



मान लीजिए आप कोई कोण ABC को मापना चाहते हैं।



∠ABC दिया है



∠ABC का मापना

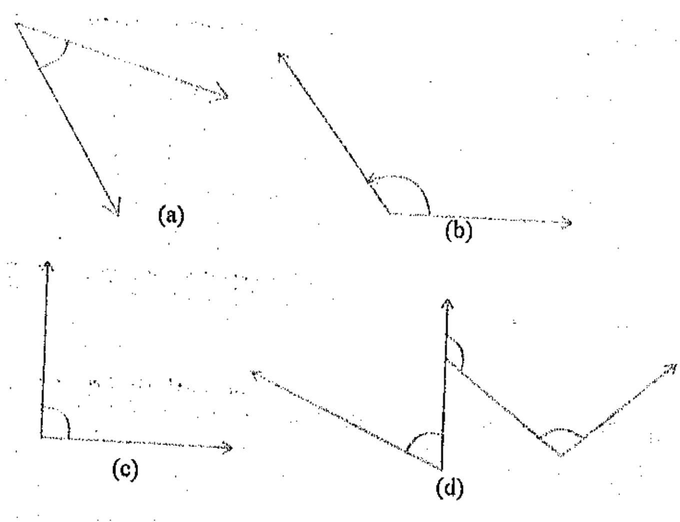
1. चाँदे को इस प्रकार रखिए कि इसके सीधे किनारे का मध्य-बिंदु (आकृति में M) कोण के शीर्ष B पर स्थित हो।
2. चाँदे को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि किरण BC इस सीधे किनारे के अनुदिश रहे।
3. चाँदे पर दो 'स्केल' (scale) हैं : वह स्केल पढ़िए जिससे किरण BC चिह्न 0° से मिल रही है।
4. वक्रीय किनारे पर किरण AB द्वारा दर्शित चिह्न कोण का अंशीय माप (degree measure) ज्ञात कराता है।

आकृति में यह 40° है।

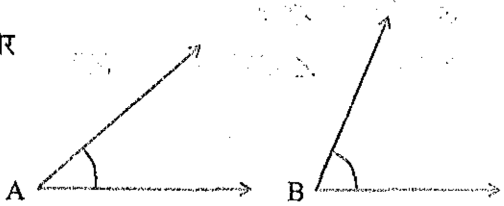
हम इसे $m\angle ABC = 40^\circ$ लिखते हैं।

प्रश्नावली 5.4

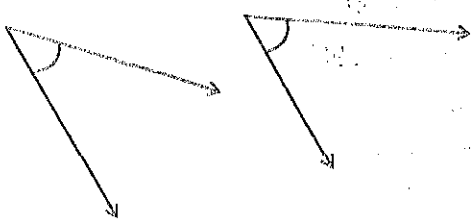
1. निम्न के क्या माप हैं :
   (i) एक समकोण? (ii) एक ऋृजुकोण?
2. बताइए सत्य (T) या असत्य (F) :
   (a) एक न्यून कोण का माप $< 90^\circ$ है।
   (b) एक अधिक कोण का माप $< 90^\circ$ है।
   (c) एक प्रतिवर्ती कोण का माप $< 180^\circ$ है।
   (d) एक संपूर्ण घूर्णन का माप $= 360^\circ$ है।
   (e) यदि $m\angle A = 53^\circ$ और $m < B = 35^\circ$ है, तो $m\angle A > m\angle B$ है।
3. निम्न के माप लिखिए :
   (a) कुछ न्यून कोण
   (b) कुछ अधिक कोण
   (प्रत्येक के दो उदाहरण दीजिए।)
4. निम्न कोणों को चाँदे से मापिए और उनके माप लिखिए :



5. किस कोण का माप बड़ा है?
पहले आकलन (estimate) कीजिए और
फिर मापिए।
कोण A का माप =
कोण B का माप =

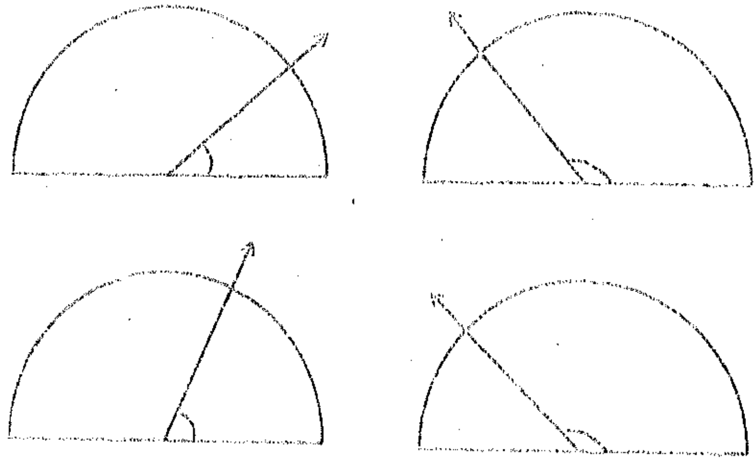


6. निम्न दो कोणों में से किस कोण का माप बड़ा है? पहले आकलन कीजिए और फिर मापन द्वारा पुष्टि कीजिए।

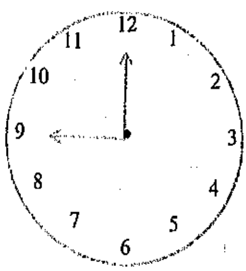


7. न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण या ऋजुकोण से रिक्त स्थानों को भरिए :
   (क) वह कोण, जिसका माप एक समकोण के माप से कम है, ... होता है।
   (ख) वह कोण, जिसका माप एक समकोण के माप से अधिक हो, ... होता है।
   (ग) वह कोण जिसका माप दो समकोणों के योग के बराबर है .... होता है।
   (घ) यदि दो कोणों के मापों का योग समकोण के माप के बराबर है, तो प्रत्येक कोण .... होता है।
   (ङ) यदि दो कोणों के मापों का योग एक ऋजुकोण के माप के बराबर है, तो इनमें से एक कोण .... या .... होना चाहिए।

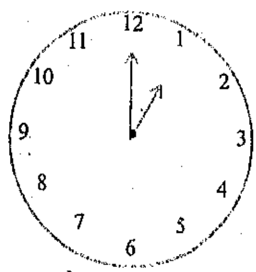
8. नीचे दी आकृति में दिए प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए (पहले देखकर आकलन कीजिए और फिर चाँदे से मापिए।) :



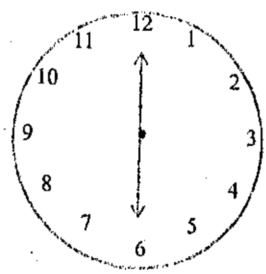
9. नीचे दी प्रत्येक आकृति में घड़ी की सुइयों के बीच के कोण का माप ज्ञात कीजिए:



प्रात: 9:00



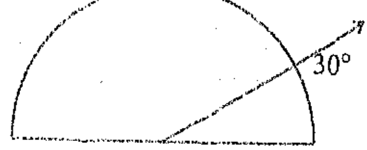
दोपहर 1:00



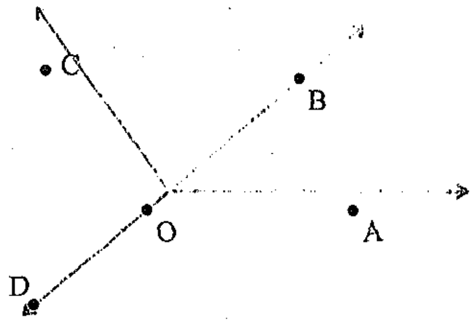
सायं 6:00

10. **खोज कीजिए :**

दी हुई आकृति में चाँदा 30° दर्शा रहा है। इसी आकृति को एक आवर्धन शीशे (magnifying glass) द्वारा देखिए। क्या यह कोण बड़ा हो जाता है? क्या कोण का माप बड़ा हो जाता है?



11. मापिए और प्रत्येक कोण को वर्गीकृत कीजिए :



कोण	∠AOB	∠AOC	∠BOC	∠DOC	∠DOA	∠DOB
माप						
प्रकार						

रेखाएँ

यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें और उनके बीच का कोण एक समकोण हो, तो वे रेखाएँ एक दूसरे पर **लंब (perpendicular)** रेखाएँ कहलाती हैं। यदि एक रेखा AB रेखा CD पर लंब है, तो इसे AB ⊥ CD लिखते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि AB ⊥ CD है, तो हमें क्या यह भी कहना चाहिए कि CD ⊥ AB है?

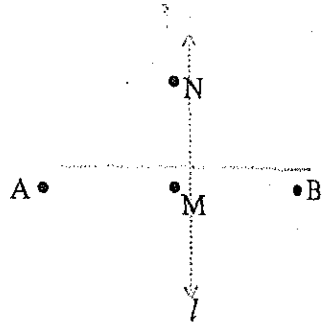
हमारे आस-पास लंब रेखाएँ!

आप अपने आस-पास की वस्तुओं में से लंब रेखाओं (या रेखाखंडों) के अनेक उदाहरण दे सकते हैं। अंग्रेजी वर्णमाला का अक्षर T इनमें से एक है। क्या कोई और अक्षर भी है, जो लंबों का उदाहरण है?

एक पोस्टकार्ड को लीजिए। क्या इसके किनारे परस्पर लंब हैं? मान लीजिए। MN बिंदु M से होकर जाने वाली रेखाखंड AB पर कोई रेखा लंब है। क्या रेखा MN रेखाखंड AB को दो बराबर भागों में विभाजित करती हैं?

क्या MN रेखाखंड AB पर लंब है?

इस प्रकार, MN रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है (अर्थात् दो बराबर भागों में विभाजित करती है) और उस पर लंब भी है।

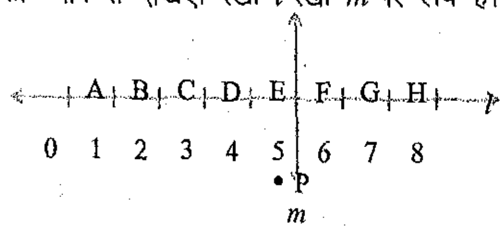


इसलिए, हम कहते हैं कि रेखा MN रेखाखंड AB का **लंब समद्विभाजक (perpendicular bisector)** है।

इसकी रचना करना आप बाद में सीखेंगे।

प्रश्नावली 5.5

1. निम्नलिखित में से कौन लंब रेखाओं के उदाहरण हैं?
   - (a) मेज के ऊपरी सिरे की आसन्न भुजाएँ
   - (b) रेल पथ की पटरियाँ
   - (c) अक्षर L बनाने वाले रेखाखंड
   - (d) अक्षर V बनाने वाले रेखाखंड
2. मान लीजिए रेखाखंड PQ रेखाखंड XY पर लंब है। मान लीजिए ये परस्पर बिंदु A पर प्रतिच्छेद करते हैं। ∠PAY की माप क्या है?
3. आपके ज्यामिति बक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। इनके कोनों पर बने कोणों के माप क्या हैं? क्या इनमें कोई ऐसी माप है जो दोनों में उभयनिष्ठ है?
4. इस आकृति को ध्यान से देखिए। रेखा l रेखा m पर लंब है।



   - (a) क्या CE = EG है?
   - (b) क्या रेखा PE रेखाखंड CG को समद्विभाजित करती है?
   - (c) कोई दो रेखाखंडों के नाम लिखिए जिनके लिए PE लंब समद्विभाजक है।

(d) क्या निम्नलिखित सत्य (T) हैं?

  (i) AC > FG

  (ii) CD = GH

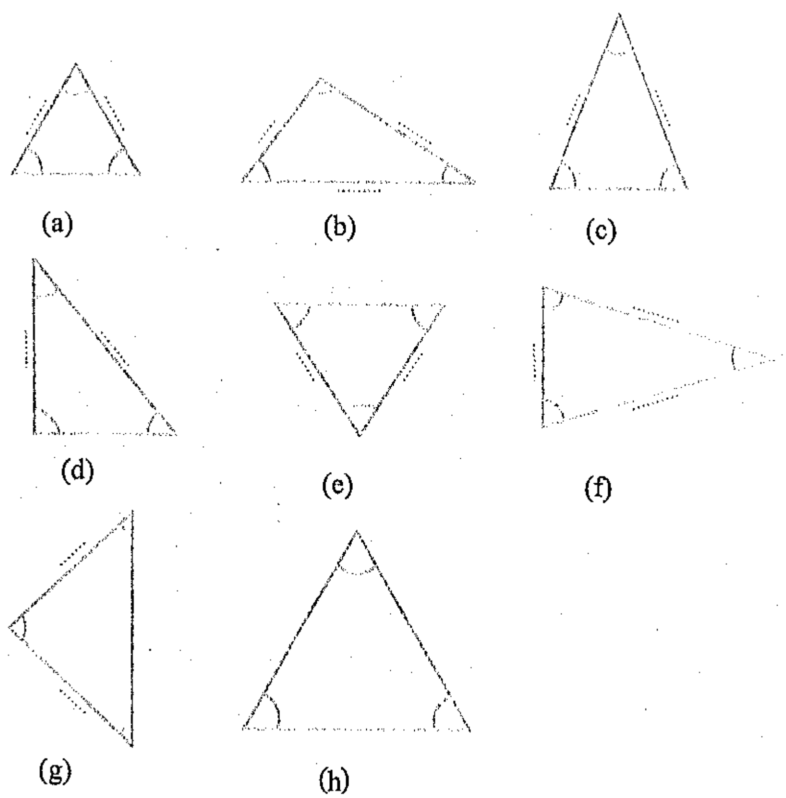
  (iii) BC < EH

5.7 त्रिभुजों का वर्गीकरण

क्या आपको सबसे कम भुजाओं वाले बहुभुज के बारे में याद है? यह एक त्रिभुज (triangle) है। आइए विभिन्न प्रकार के जो त्रिभुज हो सकते हैं, उन्हें देखें।

इन्हें कीजिए

आइए नीचे दिए हुए त्रिभुजों के कोणों और भुजाओं को क्रमशः चाँदे और रूलर से मापें। दी हुई सारणी में इनकी मापें को भरिए :



त्रिभुज के कोणों की माप	आप कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?	त्रिभुज की भुजाओं की माप
(a) ...60°..., ...60°.., ...60°.....,	सभी कोण बराबर हैं	
(b) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	
(c) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	
(d) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	
(e) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	
(f) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	
(g) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	
(h) ...., ..., ...,	...... कोण ....,	

उपरोक्त कोण, त्रिभुज और उनकी भुजाओं की मापों को ध्यानपूर्वक देखिए। क्या इनके बारे में कोई बात कही जा सकती है?

आप क्या प्राप्त करते हैं?

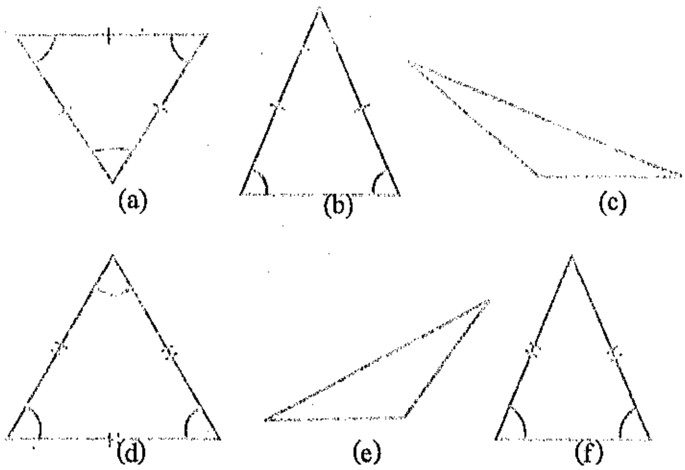
- त्रिभुज जिनके सभी कोण बराबर हैं।

  यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण बराबर हैं, तो इसकी भुजाएँ भी .... हैं।
- त्रिभुज जिनमें सभी भुजाएँ बराबर हैं।

  यदि एक त्रिभुज की सभी भुजाएँ बराबर हैं, तो उसके कोण भी .... हैं।
- त्रिभुज जिनमें दो कोण बराबर हैं और दो भुजाएँ बराबर हैं। यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हैं, तो उसके ....कोण बराबर होते हैं।
- त्रिभुज जिनमें कोई भी दो भुजाएँ बराबर नहीं हैं। यदि किसी त्रिभुज के कोई भी दो कोण बराबर नहीं हैं, तो उसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर नहीं होती हैं। यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर नहीं हैं, तो उसके तीनों कोण भी .... नहीं हैं।

कुछ और त्रिभुज लीजिए और उपरोक्त कथनों की जाँच कीजिए। इसके लिए, हमें त्रिभुजों के कोण और उनकी भुजाओं को पुनः मापना पड़ेगा।

त्रिभुजों को विभिन्न श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है और उन्हें विशेष नाम दिए गए हैं। आइए देखें कि ये क्या हैं।



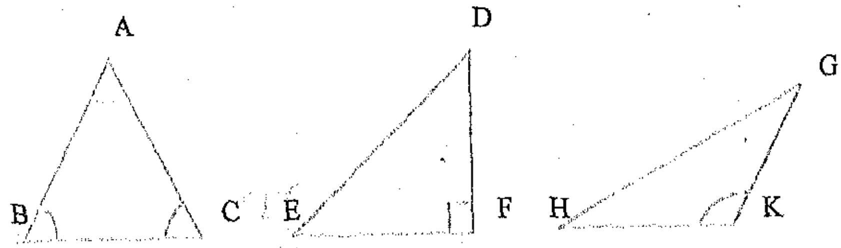
भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का नामकरण

एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर नहीं हों, **विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle)** कहलाता [(c), (e)] है। एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों, एक **समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle)** कहलाता [(b), (f)] है।

त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर हों, **समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle)** कहलाता है। [(a), (d)] इन परिभाषाओं का प्रयोग करके उन सभी त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए, जिनकी भुजाएँ आप पहले माप चुके हैं।

कोणों के आधार पर त्रिभुजों का नामकरण

यदि त्रिभुज का प्रत्येक कोण 90° से कम हो, तो वह एक **न्यूनकोण त्रिभुज (acute angled triangle)** कहलाता है। यदि इसका कोई कोण समकोण हो, तो वह त्रिभुज एक **समकोण त्रिभुज (right angled triangle)** कहलाता है। यदि इसका कोई कोण 90° से अधिक हो, तो वह त्रिभुज एक **अधिक कोण त्रिभुज (obtuse angled triangle)** कहलाता है।



न्यून कोण त्रिभुज   समकोण त्रिभुज   अधिक कोण त्रिभुज

उपरोक्त परिभाषाओं के अनुसार, उन त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए जिनके कोण आप पहले माप चुके हैं। इनमें से कितने समकोण त्रिभुज थे?

इन्हें कीजिए

निम्न के रफ चित्र खींचने का प्रयत्न कीजिए :

(a) एक विषमबाहु न्यूनकोण त्रिभुज

(b) एक अधिक कोण समद्विबाहु त्रिभुज

(c) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज

(d) एक विषमबाहु समकोण त्रिभुज

क्या आप सोचते हैं कि निम्न आकृति खींचना संभव है :

(e) एक अधिक कोण समबाहु त्रिभुज?

(f) एक समकोण समबाहु त्रिभुज?

(g) एक त्रिभुज जिसमें दो समकोण हों?

सोचिए, चर्चा कीजिए और फिर अपने निष्कर्षों को लिखिए।

प्रश्नावली 5.6

1. निम्नलिखित त्रिभुजों के प्रकार लिखिए :
   (a) त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 7 सेमी, 8 सेमी और 9 सेमी हैं।
   (b) ΔABC जिसमें $AB = 8.7$ सेमी, $AC = 7$ सेमी और $BC = 6$ सेमी है।
   (c) ΔPQR जिसमें $PQ = QR = RP = 5$ सेमी है।

(d) Δ DEF जिसमें m $\angle D = 90^\circ$ है।

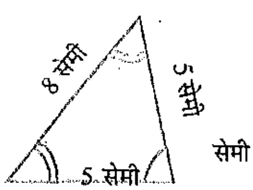
(e) Δ XYZ जिसमें m $\angle Y = 90^\circ$ और $XY = YZ$ है।

(f) $\Delta \angle$MN जिसमें $m\angle L = 30^\circ$, m $\angle M = 70^\circ$ और m $\angle N = 80^\circ$ है।

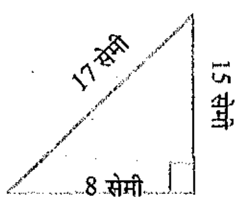
2. निम्न का सुमेलन कीजिए :

त्रिभुज के माप	**त्रिभुज का प्रकार**
(i) समान लंबाई की तीन भुजाएँ	(a) विषमबाहु समकोण त्रिभुज
(ii) समान लंबाई की दो भुजाएँ	(b) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
(iii) अलग-अलग लंबाइयों की सभी भुजाएँ	(c) अधिक कोण त्रिभुज
(iv) 3 न्यूनकोण	(d) समकोण त्रिभुज
(v) 1 समकोण	(e) समबाहु त्रिभुज
(vi) बराबर लंबाइयों की भुजाओं के साथ 1 समकोण	(f) न्यून कोण त्रिभुज
	(g) समद्विबाहु त्रिभुज

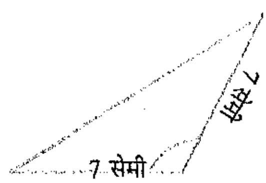
3. निम्नलिखित त्रिभुजों में से प्रत्येक का दो प्रकार से नामकरण कीजिए (आप कोण का प्रकार केवल देखकर ज्ञात कर सकते हैं।)



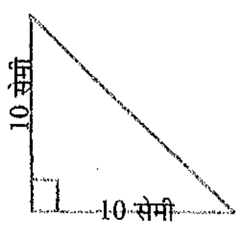
(a)



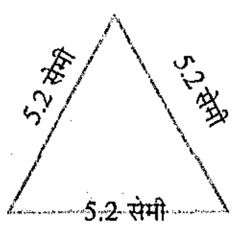
(b)



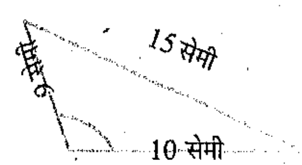
(c)



(d)



(e)



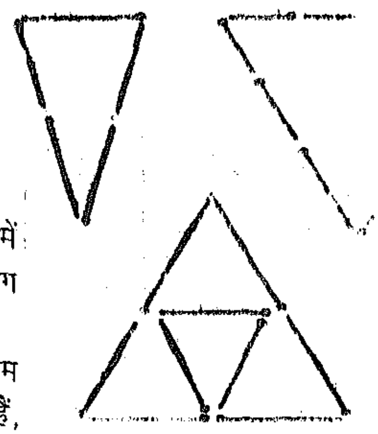
(f)

4. माचिस की तीलियों की सहायता से त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए। इनमें से कुछ आकृति में दिखाए गए हैं। क्या आप निम्न से त्रिभुज बना सकते हैं?

(a) 3 माचिस की तीलियाँ

(b) 4 माचिस की तीलियाँ

(c) 5 माचिस की तीलियाँ



(ध्यान रखिए कि आपको प्रत्येक स्थिति में सभी उपलब्ध माचिस की तीलियों का उपयोग करना है)।

प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज के प्रकार का नाम बताइए। यदि आप त्रिभुज नहीं बना पाते हैं, तो उसके कारण के बारे में सोचिए।

5.8 चतुर्भुज

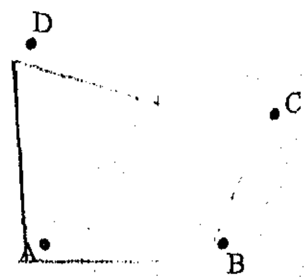
आपको याद होगा कि चार भुजाओं का बहुभुज एक **चतुर्भुज (quadrilateral)** कहलाता है।

इन्हें कीजिए

1. दो डंडी लीजिए और उन्हें इस प्रकार रखिए कि उनका एक-एक सिरा एक सिरे पर मिलें। अब डंडियों के एक अन्य युग्म को इस प्रकार रखिए कि उनके सिरे डंडियों के पहले युग्म के स्वतंत्र सिरों से जुड़ जाएँ। इस प्रकार हमें क्या आकृति प्राप्त होती है?



यह एक चतुर्भुज है, जो आप सामने देख रहे हैं। इस चतुर्भुज की भुजाएँ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ___, ___ हैं। इस चतुर्भुज के चार कोण हैं। ये ∠BAD, ∠ADC, ∠DCB, और _____ हैं।



$\overline{AC}$ इसका एक विकर्ण है। अन्य विकर्ण कौन सा है? सभी भुजाओं और विकर्णों की लंबाइयाँ मापिए। सभी कोणों को भी मापिए।

2. जैसा आपने ऊपर क्रियाकलाप किया है, चार डंडियाँ लेकर देखिए कि क्या आप इनसे ऐसा चतुर्भुज बना सकते हैं जिसमें
   (a) चारों कोण न्यून कोण हैं।
   (b) एक कोण अधिक कोण है।
   (c) एक कोण समकोण है।
   (d) दो कोण अधिक कोण हैं।
   (e) दो कोण समकोण हैं।
   (f) विकर्ण परस्पर समकोण पर हैं।

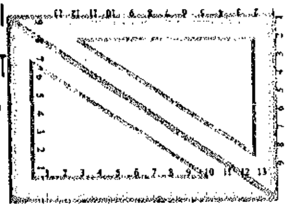
आयत

इन्हें कीजिए

आपके ज्यामिति बक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। एक 30°–60°–90° सेट स्क्वेयर है और दूसरा 45°–45°–90° सेट स्क्वेयर।

आप और आपका मित्र मिलकर इस क्रिया को कर सकते हैं :

(a) आप दोनों के पास एक-एक 30°–60°–90° सेट स्क्वेयर है। इनको आकृति में दर्शाए अनुसार रखिए। क्या आप इस प्रकार बने चतुर्भुज का नाम बता सकते हैं? इसके प्रत्येक कोण का माप क्या है?



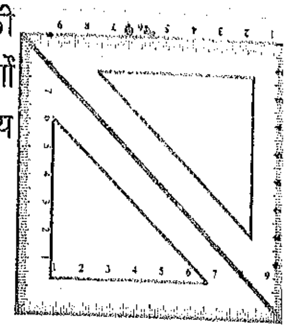
यह चतुर्भुज एक **आयत (rectangle)** है।

आयत का एक और गुण जो आप स्पष्ट रूप से यहाँ देख सकते हैं कि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

आप अन्य कौन से गुण ज्ञात कर सकते हैं?

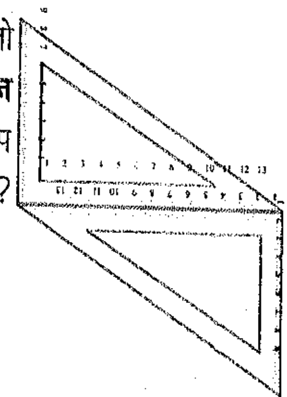
(b) यदि अन्य सेट स्क्वेयर 45°–45°–90° के युग्म का प्रयोग करें, तो आपको एक अन्य चतुर्भुज प्राप्त होगा। यह एक **वर्ग** (square) है।

क्या आप देख सकते हैं कि सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हैं? आप इसके कोणों और विकर्णों के बारे में क्या कह सकते हैं? वर्ग के कुछ अन्य गुण ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

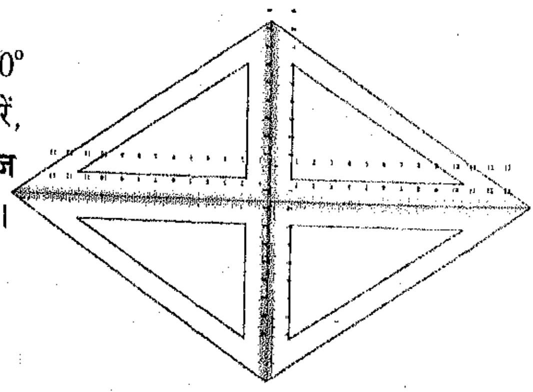


(c) यदि आप 30°–60°–90° सेट स्क्वेयरों को आकृति में दर्शाए अनुसार एक अन्य स्थिति में रखें, तो आपको एक **समांतर चतुर्भुज (parallelograms)** प्राप्त होता है। क्या आप देख रहे हैं कि इसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं? क्या इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं?

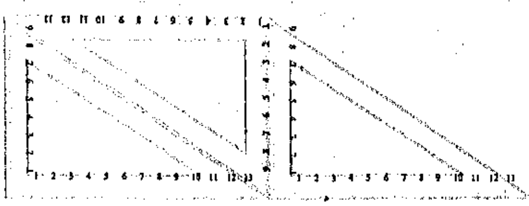
क्या इसके विकर्ण बराबर हैं?



(d) यदि आप चार 30°–60°–90° सेट स्क्वेयरों का प्रयोग करें, तो आपको एक **समचतुर्भुज (rhombus)** प्राप्त होता है।



e) यदि आप आकृति में दर्शाए अनुसार कई सेट स्क्वेयरों का प्रयोग करें, तो हमें एक ऐसा चतुर्भुज प्राप्त होगा जिसकी दो भुजाएँ समांतर होंगी।



यह एक समलंब (trapezium) है।

यहाँ आपकी खोज़ों के सारांश की एक रूपरेखा दी जा रही है। इसे पूरा कीजिए।

चतुर्भुज	सम्मुख भुजाएँ		सभी भुजाएँ	सम्मुख कोण	विकर्ण	
	समांतर	बराबर	बराबर	बराबर	बराबर	परस्पर लंब
समांतर चतुर्भुज	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं
आयत			नहीं			
वर्ग						हाँ
समचतुर्भुज				हाँ		
समलंब		नहीं				

प्रश्नावली 5.7

1. सत्य (T) या असत्य (F) कहिए :
   (a) आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।
   (b) आयत की सम्मुख भुजाओं की लंबाई बराबर होती है।
   (c) वर्ग के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।
   (d) समचतुर्भुज के सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।
   (e) समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।
   (f) समलंब के सम्मुख भुजाए समांतर होती हैं।
2. निम्नलिखित के लिए कारण दीजिए :
   (a) वर्ग को एक विशेष प्रकार का आयत समझा जा सकता है।
   (b) आयत को एक विशेष प्रकार का समांतर चतुर्भुज समझा जा सकता है।

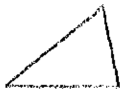
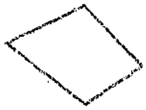
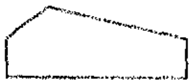
(c) वर्ग को एक विशेष प्रकार का समचतुर्भुज समझा जा सकता है।

(d) वर्ग, आयत, समचर्तुभुज और समांतर चतुर्भुज में से प्रत्येक एक चतुर्भुज भी है।

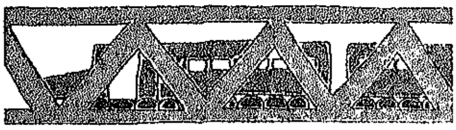
3. एक बहुभुज सम (regular) होता है, यदि उसकी सभी भुजाएँ बराबर हों और सभी कोण बराबर हों। क्या आप समचतुर्भुज (regular quadrilateral) की पहचान कर सकते हैं?

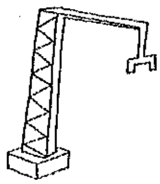
5.9 बहुभुज

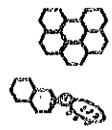
अभी तक आपने 3 और 4 भुजाओं वाले बहुभुजों (polygons) का अध्ययन किया है। जिन्हें क्रमशः त्रिभुज और चतुर्भुज कहते हैं। अब हम बहुभुजों की अवधारणा को ऐसी आकृतियों के रूप में विस्तृत करने का प्रयत्न करेंगे, जिनमें चार से अधिक भुजाएँ होंगी। हम बहुभुजों को उनकी भुजाओं की संख्याओं के आधार पर निम्न प्रकार वर्गीकृत कर सकते हैं :

भुजाओं की संख्या	नाम	आकृति
3	त्रिभुज	
4	चतुर्भुज	
5	पंचभुज	
6	षड्भुज	
8	अष्टभुज	

आप इस प्रकार के आकार (shapes) अपने दैनिक जीवन में देखते हैं। खिड़कीयाँ, दरवाज़े, दीवार, अलमारीयाँ, ब्लेकबोर्ड, अभ्यास-पुस्तिकाएँ, आदि सभी आयत के आकार के होते हैं। फर्श की टाइल भी आयताकार होती हैं। त्रिभुज की दृढ़ता वाली प्रकृति के कारण इस आकार का इंजीनियरिंग निर्माणों में लाभप्रद रूप से प्रयोग किया जाता है।







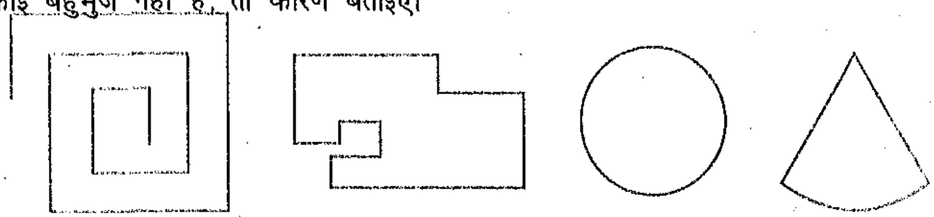
निर्माण कार्यों में त्रिभुज का अनुप्रयोग होता है।

मधुमक्खी अपना घर बनाने में षड्भुज के आकार की उपयोगिता जानती हैं।

अपने परिवेश में देखिए कि आप इन आकारों को कहाँ-कहाँ पा सकते हैं।

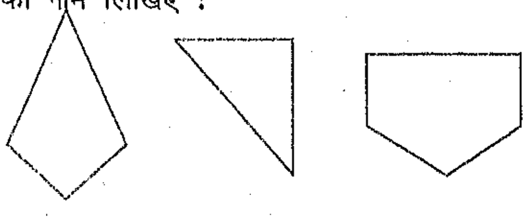
प्रश्नावली 5.8

1. जाँच कीजिए कि निम्न में से कौन-सी आकृतियाँ बहुभुज हैं। यदि इनमें से कोई बहुभुज नहीं है, तो कारण बताइए।

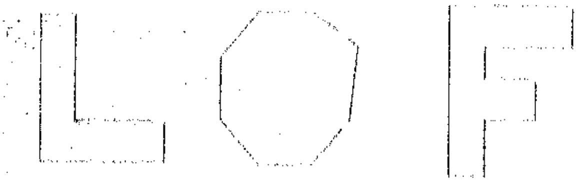


(a) (b) (c) (d)

2. प्रत्येक बहुभुज का नाम लिखिए :



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

3. एक सम षड्भुज (reguler hexagon) का एक रफ चित्र खींचिए। उसके किन्ही तीन शीर्षों को जोड़कर एक त्रिभुज बनाइए। पहचानिए कि आपने किस प्रकार का त्रिभुज खींच लिया है।

4. एक सम अष्टभुज (reguler octagon) का रफ चित्र खींचिए। [यदि आप चाहें, तो वर्गांकित कागज़ (squared paper) का प्रयोग कर सकते हैं]। इस अष्टभुज के ठीक चार शीर्षों को जोड़कर एक आयत खींचिए।

5. किसी बहुभुज का विकर्ण उसके किन्ही दो शीर्षों (आसन्न शीर्षों को छोड़कर) को जोड़ने से प्राप्त होता है (यह इसकी भुजाएँ नहीं होती हैं)। एक पंचभुज का एक रफ चित्र खींचिए और उसके विकर्ण खींचिए।

5.10 त्रिविमीय आकार

यहाँ कुछ आकार (shapes) दिए जा रहे हैं, जिन्हें आप अपने दैनिक जीवन में देखते हैं। प्रत्येक आकार एक ठोस (solid) है। यह एक 'सपाट (flat)' आकार नहीं है।



यह गेंद एक गोला (sphere) है।



आइसक्रीम शंकु (cone) के आकार में है।



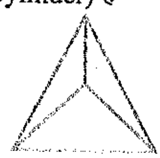
यह केन (can) एक बेलन (cylinder) है



यह बॉक्स (box) एक घनाभ (cuboid) है।



यह पासा (die) एक घन (cube) है।



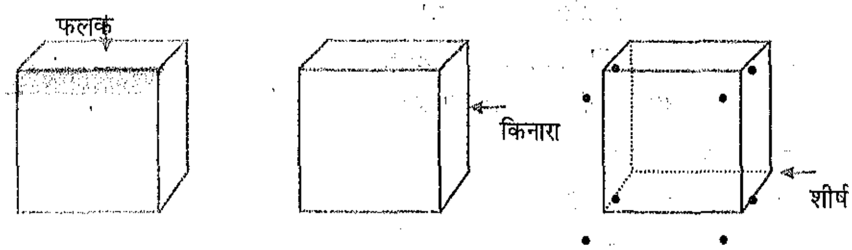
यह एक पिरामिड (pyramid) का आकार है।

किन्हीं पाँच वस्तुओं के नाम बताइए जो एक गोले से मिलती-जुलती हों।

किन्हीं ऐसी पाँच वस्तुओं के नाम बताइए जो एक शंकु से मिलती-जुलती हों।

फलक, किनारे और शीर्ष

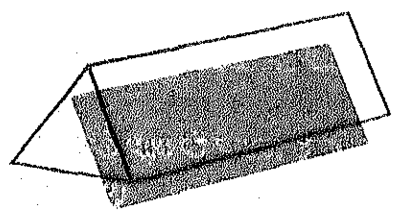
एक त्रिविमीय आकार (three dimensional shape) की व्याख्या बेहतर प्रकार से तभी की जा सकती है, जब उसके फलक (faces), किनारे (edges) और शीर्ष (vertices) ज्ञात हो जाएँ। इन तीन पदों, अर्थात् फलक, किनारे और शीर्ष से हमारा क्या तात्पर्य है?



उदाहरण के लिए, एक घन (cube) को लीजिए।

घन का प्रत्येक ऊपरी वर्गाकार पृष्ठ एक **फलक** है। इसके दो फलक एक रेखाखंड में मिलते हैं, जो घन का एक **किनारा** कहलाता है। तीन किनारे एक बिंदु पर मिलते हैं, जो घन का **शीर्ष** कहलाता है।

सामने एक **प्रिज़्म (prism)** का चित्र दिया है। क्या आपने इसे अपनी प्रयोगशाला में देखा है? इसके दो फलक त्रिभुज के आकार के हैं। इसलिए यह प्रिज़्म एक **त्रिभुजाकार प्रिज़्म (triangulur prism)** कहलाता है।

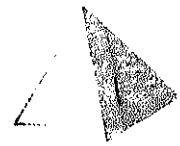


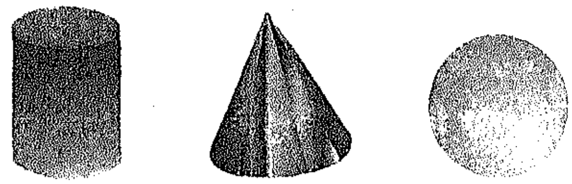
यह त्रिभुजाकार फलक इसका **आधार (base)** भी कहलाता है। इस प्रिज़्म के दो सर्वसम (identical) त्रिभुजाकार फलक हैं। एक आधार और दूसरा ऊपरी सिरा (top) कहलाता है। इन दोनों फलकों के अतिरिक्त अन्य फलक समांतर चतुर्भुज हैं।

यदि प्रिज़्म का आधार आयताकार हो, तो यह प्रिज़्म एक **आयताकार (rectangular) प्रिज़्म** कहलाता है। आयताकार प्रिज़्म के लिए क्या आपको याद है कि एक अन्य नाम क्या है?

एक **पिरामिड** वह आकार है जिसमें आधार का फलक किसी भी बहुभुज के आकार का हो सकता है और शेष फलक त्रिभुजाकार होते हैं।

सामने की आकृति में एक वर्ग पिरामिड (square pyramid) का चित्र दिखाया गया है। इसका आधार एक वर्ग है। क्या आप एक त्रिभुजाकार पिरामिड की कल्पना कर सकते हैं? इसका एक रफ चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।





बेलन, शंकु और गोले में कोई सीधा किनारा (straight edge) नहीं होता है। शंकु का आधार क्या है? क्या यह एक वृत्त है? बेलन का आधार भी एक वृत्त है। बेलन का ऊपरी सिरा आधार जैसा एक सर्वसम वृत्त है। निःसंदेह, गोले का कोई फलक नहीं है। इसके बारे में सोचिए !

इन्हें कीजिए

1. एक घनाभ एक आयताकार बक्स जैसा है। इसके 6 फलक हैं। प्रत्येक फलक के चार किनारे हैं। प्रत्येक फलक के चार कोने हैं (जो इसके शीर्ष कहलाते हैं)।



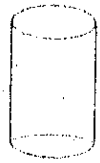
2. एक घन ऐसा घनाभ होता है, जिसके सभी किनारे बराबर लंबाई के होते हैं।

   इसके ______ फलक हैं।

   प्रत्येक फलक के ______ किनारे हैं।

   प्रत्येक फलक के ______ शीर्ष हैं।

3. एक बेलन एक गोल पाइप जैसा दिखाई देता है। इसका आधार वाला फलक और ऊपरी फलक वृत्ताकार होता है।

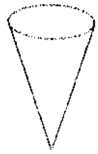


फलक : ______

किनारे : ______

कोने : ______

4. एक शंकु, एक लट्टू (top) या सर्कस के जोकर की टोपी के आकार जैसा दिखाई देता है।

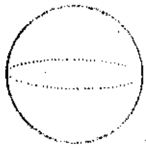


फलक : ______

किनारे : ______

कोने : ______

5. एक गोला एक गोल कंचे जैसा दिखाई देता है।

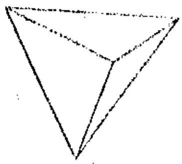


फलक : ______

किनारे : ______

कोने : ______

6. एक त्रिभुजाकार पिरामिड का आधार एक त्रिभुज होता है। यह चतुष्फलक (tetrahedron) भी कहलाता है।

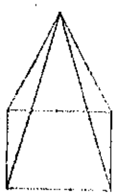


फलक : ______

किनारे : ______

कोने : ______

7. एक वर्ग पिरामिड का आधार एक वर्ग होता है।

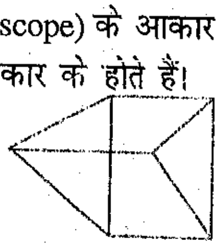


फलक : ______

किनारे : ______

कोने : ______

8. एक त्रिभुजकार प्रिज़्म प्रायः एक केलाइडोस्कोप (Kaleidoscope) के आकार का होता है। इसका आधार और ऊपरी सिरा त्रिभुज के आकार के होते हैं।

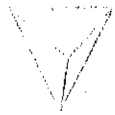


फलक : ______

किनारे : ______

कोने : ______

1. निम्न का सुमेलन कीजिए :

(a) शंकु (i) 

(b) गोला (ii) 

(c) बेलन (iii) 

(d) घनाभ (iv) 

(e) पिरामिड (v) 

इन आकारों में से प्रत्येक के दो और उदाहरण दीजिए।

2. निम्न किस आकार के हैं?
   (a) आपका ज्यामिति बक्स
   (b) एक ईंट
   (c) एक माचिस की डिब्बी
   (d) सड़क बनाने वाला रोलर (roller)
   (e) एक लड्डू

हमने क्या चर्चा की?

1. एक रेखाखंड के दोनों अंत बिंदुओं के बीच की दूरी उसकी लंबाई कहलाती है।
2. रेखाखंडों की तुलना करने के लिए एक अंशांकिक रूलर और एक डिवाइडर उपयोगी होते हैं।
3. जब घड़ी की एक हुई एक स्थान दूसरे स्थान पर जाती है, तो हमे कोण का एक उदाहरण प्राप्त होता है।

सुई का एक पूरा चक्कर 1 **घूर्णन** कहलाता है।

समकोण $\frac{1}{4}$ घूर्णन है और **ऋजुकोण** $\frac{1}{2}$ घूर्णन है। कोणों को अंशों (degrees) में मापने के लिए हम **चाँदे** का प्रयोग करते हैं।

समकोण की माप 90° और **ऋजुकोण** की माप 180° होती है। एक कोण जिसकी माप समकोण से कम हो, **न्यूनकोण** कहलाता है और जिसकी माप समकोण से अधिक और ऋजुकोण से कम हो **अधिक कोण** कहलाता है।

एक **प्रतिवर्ती कोण** ऋजुकोण से बड़ा और संपूर्ण कोण से छोटा होता है।

4. दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ परस्पर लंब कहलाती हैं, यदि उनके बीच का कोण 90° हो।
5. एक रेखाखंड का लंब समद्विभाजक उस रेखाखंड पर लंब होता है और उसे दो बराबर भागों में विभाजित करता है।
6. कोणों के आधार पर त्रिभुजों को निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है :

त्रिभुज के कोणों के प्रकार	*नाम*
प्रत्येक कोण न्यून कोण	न्यून कोण त्रिभुज
एक कोण समकोण	समकोण त्रिभुज
एक कोण अधिक कोण	अधिक कोण त्रिभुज

7. भुजाओं की लंबाइयों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्न प्रकार होता है:

त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाइयाँ	*नाम*
तीनों भुजाएँ असमान लंबाइयों वाली	विषमबाहु त्रिभुज
दो भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर	समद्विबाहु त्रिभुज
तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर	समबाहु त्रिभुज

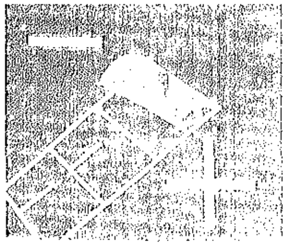
8. बहुभुजों के नाम उनकी भुजाओं की संख्या के आधार पर निम्न प्रकार हैं :

भुजाओं की संख्या	*बहुभुज का नाम*
3	त्रिभुज
4	चतुर्भुज
5	पंच भुज
6	षड्भुज
8	अष्टभुज

9. चतुर्भुजों को उनके गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है :

गुण	*चतुर्भुज का नाम*
समांतर रेखाओं के दो युग्म	समांतर चतुर्भुज
4 समकोण वाला समांतर चतुर्भुज	आयत
4 बराबर भुजाओं वाला समांतर चतुर्भुज	समचतुर्भुज
4 समकोण वाला समचतुर्भुज	वर्ग

10. हम अपने परिवेश में (आस-पास) अनेक त्रिविमीय आकार देखते हैं। इनमें से कुछ घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड हैं।



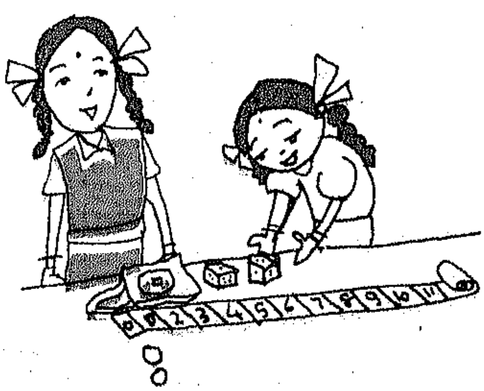
अध्याय 6

पूर्णांक

6.1 भूमिका

सुनीता की माँ के पास 8 केले हैं। सुनीता को अपने मित्रों के साथ एक पिकनिक पर जाना है। वह अपने साथ 10 केले ले जाना चाहती है। क्या उसकी माँ उसे 10 केले दे सकती है? उसके पास पर्याप्त केले नहीं हैं, इसलिए वह अपनी पड़ोसन से 2 केले उधार लेकर उन्हें बाद में लौटाने का आश्वासन देती है। सुनीता को 10 केले देने के बाद, उसकी माँ के पास कितने केले बचते हैं? उसके पास कोई भी केला शेष नहीं बचता है, परंतु उसे अपनी पड़ोसन को 2 केले वापस करने हैं। इसलिए जब उसके पास कुछ और केले आ जाएँगे, मान लीजिए 6 केले, तो वह 2 केले वापस कर देगी और उसके पास केवल 4 केले बचेंगे।

रोनाल्ड एक पेन खरीदने बाजार जाता है। उसके पास केवल 12 रु हैं, परंतु एक पेन का मूल्य 15 रु है। दुकानदार उसकी ओर 3 रु की राशि उधार के रूप डायरी में लिख देता है। परंतु वह किस प्रकार याद रखेगा कि उसे 3 रु की राशि रोनाल्ड को देनी है या उससे लेनी है? क्या वह इस उधार की राशि को किसी रंग या चिह्न से व्यक्त कर सकता है?



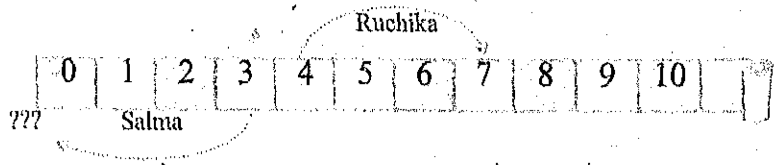
रूचिका और सलमा एक संख्या पट्टी का जिस पर समान अंतराल पर 0 से 25 अंक अंकित हैं एक खेल खेल रही हैं।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

प्रारंभ में, वे दोनों शून्य चिह्न पर एक-एक रंगीन टोकन रखती हैं। एक थैले में दो रंगीन पासे (dice) रखे हैं और वे एक के बाद एक निकाले जाते हैं। इन पासों में से एक पासा लाल रंग का है और दूसरा नीले रंग का है। यदि पासा लाल रंग का है, तो उसे फेंकने पर जो संख्या प्राप्त होती है टोकन को उतने स्थान आगे बढ़ा दिया जाता है। यदि पासा नीले रंग का है, तो उसे फेंकने पर जो संख्या प्राप्त होती है, टोकन को उतने स्थान पीछे कर दिया जाता है। प्रत्येक चाल के बाद पासों को थैले में वापस रख दिया जाता है, ताकि दोनों व्यक्तियों को दोनों पासों को फेंकने के समान अवसर मिलें। जो 25वें चिह्न पर पहले पहुँचता है, उसे जीता हुआ माना जाता है। वह खेलना प्रारंभ करती हैं। रुचिका लाल पासा प्राप्त करती है और उसे फेंकने पर चार प्राप्त होता है। इस प्रकार, वह टोकन को पट्टी पर चार से अंकित स्थान पर रख देती है। सलमा भी थैले में से लाल पासा निकालती है और उसे फेंकने पर संख्या 3 प्राप्त करती है। इस प्रकार, वह अपने टोकन को तीन से अंकित स्थान पर रख देती है।

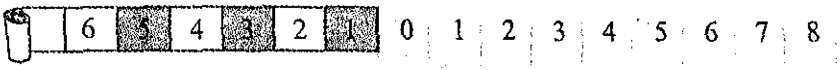
दूसरे प्रयत्न में, रुचिका लाल पासे से 3 अंक प्राप्त करती है और सलमा नीले पासे से 4 अंक प्राप्त करती है। क्या आप सोच सकते हैं कि दूसरे प्रयत्न के बाद वे अपने-अपने टोकन किन स्थानों पर रखेंगे?

रुचिका आगे बढ़ती है और 4 + 3, अर्थात् 7 वें स्थान पर अपना टोकन रखती है।

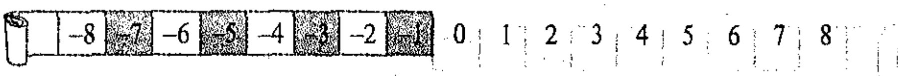


सलमा अपना टोकन शून्य स्थान पर रखती है। रुचिका ने इस पर आपत्ति जताई और कहा कि उसे शून्य से पीछे होना चाहिए। सलमा उससे सहमत हो जाती है। परंतु शून्य के पीछे कुछ भी नहीं है। वे क्या करें?

तब सलमा और रुचिका ने इस पट्टी को दूसरी ओर बढ़ा दिया। उन्होंने दूसरी ओर एक नीली पट्टी का प्रयोग किया।



अब सलमा ने सुझाव दिया कि चूँकि वह शून्य से एक स्थान पीछे है, इसलिए इस स्थान को नीले एक से अंकित किया जा सकता है। यदि टोकन नीले एक पर है, तो नीले एक के पीछे वाला स्थान 'नीला दो' होगा। इसी प्रकार 'नीले दो' के पीछे वाला स्थान 'नीला तीन' होगा। इस प्रकार से वे पीछे चलने का निर्णय लेती हैं। परंतु उन्हें नीला कागज़ नहीं मिला। तब रुचिका ने कहा कि जब हम विपरीत दिशा में चल रहे हों, तो हमें दूसरी ओर एक चिह्न का प्रयोग कर लेना चाहिए। इस प्रकार, देखिए कि शून्य से छोटी संख्याओं पर



जाने के लिए हमें एक चिह्न का प्रयोग करने की आवश्यकता होती है। इसके लिए उस संख्या के आगे ऋण (–) चिह्न का प्रयोग किया जाता है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि ऋणात्मक (negative) चिह्न लगी हुई संख्याएँ शून्य से छोटी होती हैं। इन्हें ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं।

इन्हें कीजिए

(कौन कहाँ है)

मान लीजिए डेविड और मोहन ने 0 स्थान से विपरीत दिशाओं में चलना प्रारंभ कर दिया है। मान लीजिए कि 0 के दाईं ओर चले कदमों को '+' चिह्न से निरूपित किया जाता है और 0 से बाईं ओर चले कदमों को '–' चिह्न से निरूपित किया जाता है। यदि मोहन शून्य के दाईं ओर 5 कदम चलता है, तो उसे +5 से निरूपित किया जा सकता है और यदि डेविड शून्य के बाईं ओर 5 कदम चलता है, तो उसे – 5 से निरूपित किया जा सकता है। अब निम्नलिखित स्थानों को + या – चिह्न से निरूपित कीजिए :

(a) शून्य के बाईं ओर 8 कदम (b) शून्य के दाईं ओर 7 कदम

(c) शून्य के दाईं ओर 11 कदम (d) शून्य के बाईं ओर 6 कदम

इन्हें कीजिए

(मेरे पीछे कौन आ रहा है)

पिछले उदाहरणों में हमने देखा कि यदि एक ऐसी संख्या के बराबर चलना है, जो धनात्मक है, तो हम दाईं ओर चलते हैं। यदि इस प्रकार का केवल 1 कदम चला जाता है, तो हमें उस संख्या का परवर्ती (Successor) प्राप्त होता है।



निम्नलिखित संख्याओं के परवर्ती लिखिए :

संख्या	परवर्ती
10	
8	
– 5	
– 3	
0	

यदि हमें ऋणात्मक संख्या के बराबर चलना है, तो बाईं ओर को चला जाता है।

यदि बाईं ओर केवल 1 कदम चला जाता है, तो हमें उस संख्या का पूर्ववर्ती (Predecessor) प्राप्त होता है।

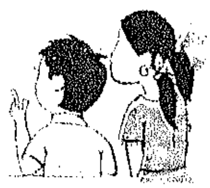


अब निम्नलिखित संख्याओं के पूर्ववर्ती लिखिए :

संख्या	पूर्ववर्ती
10	
8	
5	
3	
0	

6.1.1 मेरे साथ एक चिह्न लगाइए

हम देख चुके हैं कि कुछ संख्याओं के आगे ऋण (–) चिह्न लगा होता है। उदाहरणार्थ, यदि हम दुकानदार को दी जाने वाली रोनाल्ड की देय राशि को दर्शाना चाहते हैं, तो हम इसे – 3 लिखेंगे।



नीचे एक दुकानदार का खाता दिखाया जा रहा है जो कुछ विशेष वस्तुओं की बिक्री से प्राप्त लाभ और हानि को दर्शाता है :

वस्तु का नाम	लाभ	हानि	उचित चिह्न द्वारा निरूपण
सरसों का तेल	150 रु		....
चावल		250 रु	....
काली मिर्च	225 रु		....
गेहूँ	200 रु		....
मूँगफली का तेल		330 रु	....

चूँकि लाभ और हानि विपरीत स्थितियाँ हैं, इसलिए यदि लाभ को '+' चिह्न से निरूपित किया जाता है, तो हानि को '–' चिह्न से निरूपित किया जाएगा। उपरोक्त खाते में उचित चिह्न का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थानों को भरिए।

इसी प्रकार की अन्य स्थितियाँ, जहाँ हम इन चिह्नों का प्रयोग करते हैं नीचे दी गई हैं।

जैसे-जैसे हम नीचे जाते हैं, ऊँचाई कम होती जाती है। इस प्रकार, समुद्र स्तर (तल) से नीचे की ऊँचाई को हम एक ऋणात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं और समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई को एक धनात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं।

यदि कमाई गई (अर्जित की गई) राशि को '+' चिह्न से निरूपित किया जाए, तो खर्च (व्यय) की गई राशि को '–' चिह्न से निरूपित किया जा सकता है। इसी प्रकार 0°C से ऊपर के तापमान को '+' चिह्न और 0°C से नीचे के तापमान को '–' चिह्न से निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ, 0° C से 10° नीचे के तापमान को – 10°C लिखा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित को उचित चिह्न के साथ लिखिए :

(a) समुद्र तल से 100 मी नीचे

(b) 0°C से 25°C ऊपर तापमान

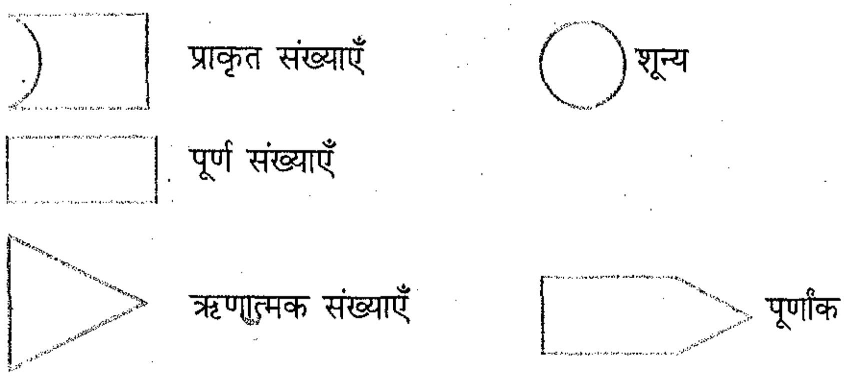
(c) 0°C से 15°C नीचे तापमान

6.2 पूर्णांक

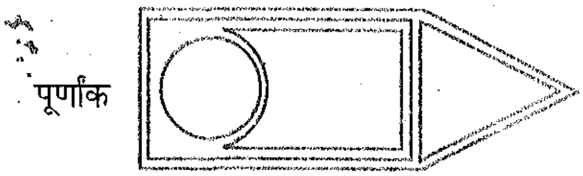
सबसे पहले ज्ञात की गई संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ, अर्थात् 1, 2, 3, 4,... हैं। यदि हम प्राकृत संख्याओं के संग्रह में शून्य को सम्मिलित कर लेते हैं, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होता है। इन संख्याओं को पूर्ण संख्याएँ कहते हैं। इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4,... पूर्ण संख्याएँ हैं। इन संख्याओं का आप अध्याय 2 में अध्ययन कर चुके हैं। अब हमें ज्ञात हो गया है कि ऋणात्मक संख्याएँ जैसे –1, – 2, – 3, – 4, – 5, ... भी होती हैं। यदि हम पूर्ण संख्याओं और इन ऋणात्मक संख्याओं को मिला लें, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होगा, जो, 1, 2, 3, ..., – 1, – 2, – 3, – 4, ... है। संख्याओं के इस संग्रह को पूर्णांकों (integers) का संग्रह कहते हैं।

इस संग्रह में 1, 2, 3, ... धनात्मक पूर्णांक कहलाते हैं और – 1, – 2, – 3, ... ऋणात्मक पूर्णांक कहलाते हैं।

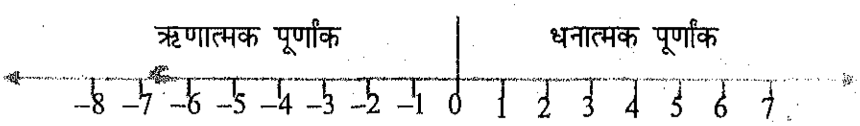
आइए इसे निम्न आकृतियों द्वारा समझने का प्रयत्न करें। मान लीजिए ये आकृतियाँ अपने सम्मुख लिखी संख्याओं या उनके संग्रहों को निरूपित करती हैं।



तब पूर्णांकों के संग्रह को निम्नलिखित आरेख से समझा जा सकता है, जिसमें पिछली सभी संख्याएँ और उनके संग्रह सम्मिलित हैं।

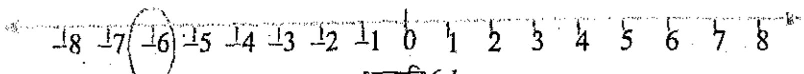


6.2.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण



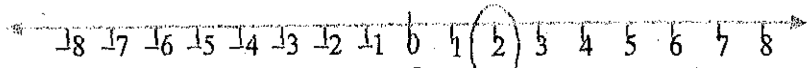
एक रेखा खींचिए और उस पर समान दूरी पर कुछ बिंदु अंकित कीजिए, जैसा कि ऊपर आकृति में दिखाया गया है। इनमें से एक बिंदु को शून्य से अंकित कीजिए। शून्य के दाईं ओर के बिंदु धनात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें + 1, + 2, + 3, इत्यादि या केवल 1, 2, 3 इत्यादि से अंकित किया गया है। शून्य के बाईं ओर के बिंदु ऋणात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें – 1, – 2, – 3 इत्यादि से अंकित किया गया है।

इस रेखा पर – 6 अंकित करने के लिए, हम शून्य के बाईं ओर 6 बिंदु (कदम) चलते हैं (आकृति 6.1)



आकृति 6.1

इस रेखा पर + 2 अंकित करने के लिए, हम शून्य के दाईं ओर 2 बिंदु चलते हैं (आकृति 6.2)



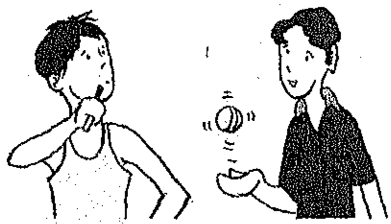
आकृति 6.2

प्रयास कीजिए

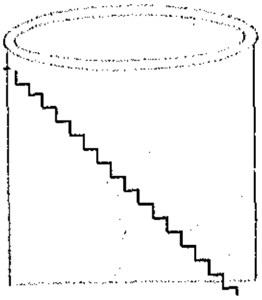
संख्या रेखा पर – 3, 7, – 4, – 8, – 1 और – 3 को अंकित कीजिए।

6.2.2 पूर्णांकों में क्रमबद्धता

रमन और इमरान एक गाँव में रहते हैं, जहाँ सीढ़ियों वाला एक कुआँ है। इस कुएँ में तली तक कुल 25 सीढ़ियाँ हैं।



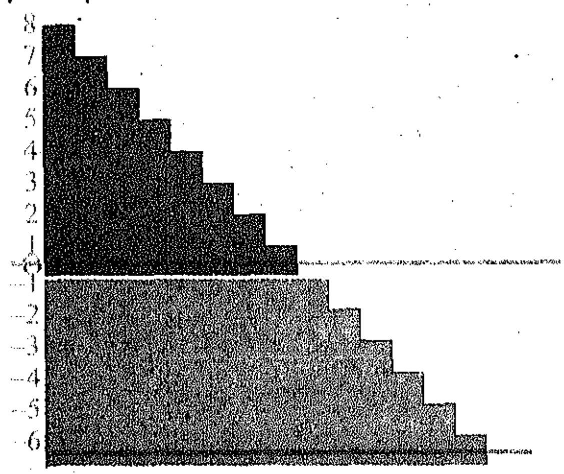
एक दिन रमन और इमरान कुएँ के अंदर गए और उन्होंने पाया कि उसमें जल स्तर तक 8 सीढ़ियाँ हैं। उन्होंने यह देखने का निर्णय लिया कि वर्षा होने पर उस कुएँ में कितना जल आ जाएगा। उन्होंने इस समय के जल स्तर पर शून्य अंकित किया और उसमें ऊपर की सीढ़ियों को क्रम से 1,2,3,4,... अंकित किया। वर्षा के बाद उन्होंने देखा कि जल स्तर छठी सीढ़ी तक बढ़ गया है। कुछ महीने बाद, उन्होंने देखा कि जल स्तर शून्य के चिह्न से तीन सीढ़ी नीचे पहुँच गया है। अब वे जल स्तर के गिरने को संगत सीढ़ियों से अंकित करके देखना प्रारंभ करने के बारे में सोचने लगे। क्या आप उनकी सहायता कर सकते हैं?



यकायक, रमन को याद आता है कि उसने एक बड़े बाँध पर शून्य से भी नीचे लिखी संख्याओं को देखा था। इमरान इस ओर ध्यान दिलाता है कि शून्य के ऊपर की संख्याओं और शून्य के नीचे की संख्याओं में भेद जानने के लिए कोई न कोई विधि अवश्य होनी चाहिए। तब रमन याद करता है कि शून्य चिह्न के नीचे अंकित संख्याओं के आगे ऋण चिह्न लगा हुआ था। इसलिए, उन्होंने शून्य के नीचे की एक सीढ़ी को -1 से अंकित किया, शून्य के नीचे की दो सीढ़ियों को -2 से अंकित किया, इत्यादि।

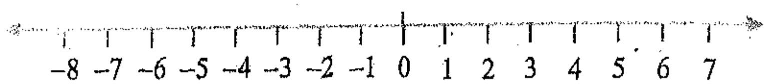
इसलिए, इस समय जल स्तर -3 है (शून्य से 3 सीढ़ी नीचे)। इसके बाद, जल का प्रयोग होने के कारण, जल स्तर 1 सीढ़ी और नीचे गिर जाता है और -4 हो जाता है। आप देख सकते हैं कि $-4 < -3$ है।

उपरोक्त उदाहरण को ध्यान में रखते हुए, रिक्त खानों को > और < चिह्नों का प्रयोग करते हुए भरिए :



0	☐	-1	-100	☐	-101
-50	☐	-70	50	☐	-51
-53	☐	-5	-7	☐	1

आइए अब पुनः उन पूर्णांकों को देखें जो एक संख्या रेखा पर निरूपित किए गए हैं।



आकृति 6.3

हम जानते हैं कि $7 > 4$ होता है और ऊपर खींची गई संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है (आकृति 6.3)।

इसी प्रकार, $4 > 0$ और संख्या 4 संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूँकि संख्या 0 संख्या -3 के दाईं ओर स्थित है इसलिए $0 > -3$ है। पुनः संख्या -3 संख्या -8 के दाईं ओर स्थित है। इसलिए $-3 > -8$ है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं, तो संख्या का मान बढ़ता है और जब हम बाईं ओर चलते हैं, तो संख्या का मान घटता है।

अतः, $-3 < -2$, $-2 < -1$, $-1 < 0$, $0 < 1$, $1 < 2$, $2 < 3$ इत्यादि।

इस प्रकार, संख्या रेखा पर शून्य के दाईं ओर स्थित संख्याओं के मान बढ़ते जाते हैं और शून्य के बाईं ओर स्थित संख्याओं के मान घटते जाते हैं। ध्यान दीजिए कि ये मान इन संख्याओं की शून्य से दूरियों के आधार पर बढ़ते या घटते हैं। ध्यान दीजिए कि शून्य के दाईं ओर संख्याओं के संख्यात्मक मानों के बड़े होने पर उनके मानों में बढ़ोत्तरी होती है, परंतु शून्य के बाईं ओर संख्याओं के संख्यात्मक मानों के बड़े होने पर उनके मान घटते जाते हैं।

अतः, पूर्णांकों के संग्रह को ..., –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5... लिखा जा सकता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्या युग्म > या < का प्रयोग करते हुए तुलना कीजिए :

0 □ –8 ; –1 □ –15

5 □ –5 ; 11 □ 15

0 □ 6 ; –20 □ 2

उपरोक्त प्रश्नों से, रोहिणी निम्नलिखित निष्कर्षों पर पहुँचती है :

(a) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(b) शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।

(c) शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(d) शून्य न तो एक ऋणात्मक पूर्णांक है और न ही एक धनात्मक पूर्णांक है।

(e) कोई संख्या शून्य से दाईं ओर जितनी अधिक दूरी पर होगी उतनी ही बड़ी होगी।

(f) कोई संख्या शून्य से बाईं ओर जितनी अधिक दूरी पर होगी, उतनी ही छोटी होगी।

क्या आप उससे सहमत हैं? उदाहरण दीजिए।

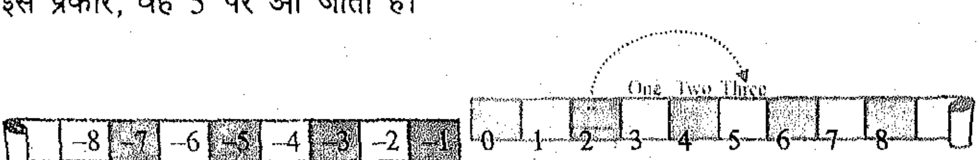
उदाहरण 1 संख्या रेखा को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए : – 8 और – 2 के बीच में कौन सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है और कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

हल – 8 और – 2 के बीच स्थित संख्याएँ – 7, – 6, – 5, – 4 और – 3 है। इनमें से – 3 सबसे बड़ी संख्या है और – 7 सबसे छोटी संख्या हैं।

यदि मैं शून्य पर नहीं हूँ, तो मेरे चलने पर क्या होता है?

आइए सलमा और रुचिका द्वारा पहले खेले गए खेल पर विचार करें। मान लीजिए कि रुचिका का टोकन 2 पर है। अगली बार, उसे लाल पासा प्राप्त होता है और उसे फेंकने पर संख्या 3 प्राप्त होती है। इसका अर्थ है कि वह 2 के दाईं ओर 3 स्थान चलेगी।

इस प्रकार, वह 5 पर आ जाती है।



दूसरी ओर, यदि सलमा 1 पर थी और थैले में से नीला पासा निकालती है, जिसे फेंकने पर उसे संख्या 3 प्राप्त होती है, तो इसका अर्थ है कि वह 1 के बाईं ओर 3 स्थान चलेगी। इस प्रकार, वह –2 पर पहुँच जाएगी।



संख्या रेखा को देखकर निम्नलिखित प्रश्न का उत्तर दीजिए :

उदाहरण 2 : (a) –3 पर एक बटन रखा गया है। –9 पर पहुँचने के लिए, हम किस दिशा में और कितने कदम चलें?

(b) यदि हम संख्या –6 के दाईं ओर 4 कदम चलें, तो किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

हल : (a) हमें –3 के बाईं ओर 6 कदम चलने पड़ेंगे।

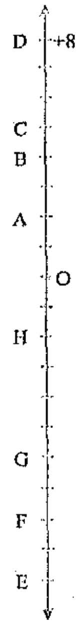
(b) हम संख्या –2 पर पहुँच जाएँगे।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित के विपरीत (opposites) लिखिए :
   - (a) भार में वृद्धि
   - (b) 30 किमी उत्तर दिशा
   - (c) 326 ई पूर्व
   - (d) 700 रु की हानि
   - (e) समुद्र तल से 100 मी ऊपर
2. निम्नलिखित में प्रयुक्त हुई संख्याओं को उचित चिह्न लगाकर पूर्णांकों के रूप में लिखिए :
   - (a) एक हवाई जहाज़ भूमि से दो हजार मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है।
   - (b) एक पनडुब्बी समुद्र तल से 800 मीटर की गहराई पर चल रही है।
   - (c) खाते में 200 रु जमा कराना।
   - (d) खाते में से 700 रु निकालना।

3. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

   (a) + 5 (b) – 10 (c) + 8 (d) – 1 (e) – 6



4. संलग्न आकृति में एक ऊर्ध्वाधर संख्या रेखा को दिखाया गया है, जो पूर्णांकों को निरूपित करती है। इस रेखा को देखिए और निम्नलिखित बिंदुओं के स्थान ज्ञात कीजिए :

   (a) यदि बिंदु D पूर्णांक + 8 है, तो – 8 वाला बिंदु कौन सा है?

   (b) क्या G एक ऋणात्मक पूर्णांक है या धनात्मक पूर्णांक है?

   (c) बिंदु B और E के संगत पूर्णांक लिखिए।

   (d) इस संख्या रेखा पर अंकित बिंदुओं में से किसका मान सबसे कम है?

   (e) सभी बिंदुओं को उनके मानों के घटते हुए क्रम में लिखिए।

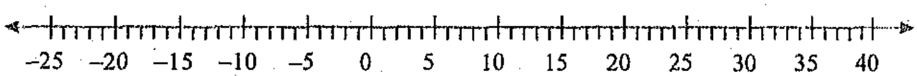
5. वर्ष के विशेष दिन के लिए भारत के पाँच स्थानों पर रहे तापमानों की सूची नीचे दी गई है :

स्थान	**तापमान**	
सियाचिन	0°C से 10°C नीचे	....
शिमला	0°C से 2°C नीचे	....
अहमदाबाद	0°C से 30°C ऊपर	....
दिल्ली	0°C से 20°C ऊपर	....
श्रीनगर	0°C से 5°C नीचे	....



   (a) इन स्थानों के तापमानों को पूर्णांकों के रूप में रिक्त स्तंभ में लिखिए।

   (b) निम्नलिखित संख्या रेखा डिग्री सेल्सियस (Degree Celsius) में तापमानों को निरूपित करती है :



   उपरोक्त स्थानों के नाम संख्या रेखा पर उनके तापमानों के संगत अंकित कीजिए।

   (c) कौन-सा स्थान सबसे ठंडा है?

   (d) उन स्थानों के नाम लिखिए जिनका तापमान 10°C से ऊपर है।

6. निम्नलिखित युग्मों में, कौन-सी संख्या, संख्या रेखा पर दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित है?

(a) 2, 9 (b) – 3, – 8 (c) 0, – 1

(d) – 11, 10 (e) – 6, 6 (f) 1, – 100

7. नीचे दिए हुए युग्मों के पूर्णांकों के बीच के सभी पूर्णांक लिखिए (बढ़ते हुए क्रम में लिखिए) :

(a) 0 और – 7 (b) – 4 और 4

(c) – 8 और – 15 (d) – 30 और – 23

8. (a) – 20 से बड़े चार ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

(b) – 10 से छोटे चार ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

9. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य अथवा असत्य लिखिए। यदि कथन असत्य है, तो सत्य बनाइए।

(a) संख्या रेखा पर – 8, – 10 के दाईं ओर स्थित है।

(b) संख्या रेखा पर – 100, – 50 के दाईं ओर स्थित है।

(c) सबसे छोटा ऋणात्मक पूर्णांक – 1 है।

(d) – 26 पूर्णांक – 25 से बड़ा है।

10. एक संख्या रेखा खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) यदि हम – 2 के दाईं ओर 4 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(b) यदि हम 1 के बाईं ओर 5 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

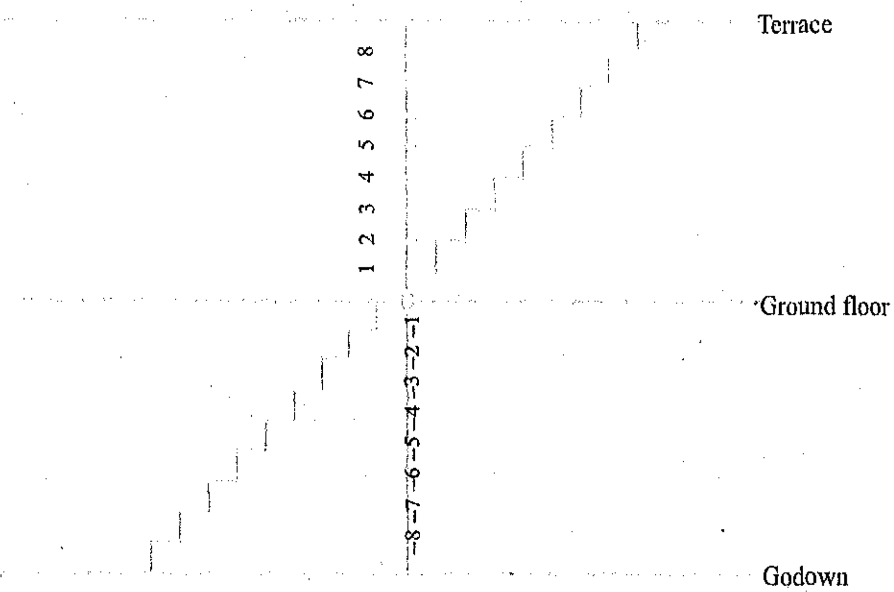
(c) यदि हम संख्या रेखा पर – 8 पर हैं, तो – 13 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

(d) यदि हम संख्या रेखा पर – 6 पर हैं, तो – 1 पर पहुँचने के लिए, हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

इन्हें कीजिए

(ऊपर और नीचे जाना या चलना)

मोहन के घर में, छत पर जाने के लिए और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियाँ बनी हुई हैं। आइए छत पर जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक मानें और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक मानें, तथा भूमि तल से निरूपित संख्या को 0 मानें।



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए और अपने उत्तर को पूर्णांकों के रूप में लिखिए :

(a) भूमि तल से 6 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(b) भूमि तल से 4 सीढ़ी नीचे चलिए।

(c) भूमि तल से 5 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 3 सीढ़ी और ऊपर चलिए।

(d) भूमि तल से 6 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 2 सीढ़ी और नीचे चलिए।

(e) भूमि तल से 5 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 12 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(f) भूमि तल से 8 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 5 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(g) भूमि तल से 7 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 10 सीढ़ी नीचे चलिए।

अमीना ने इन्हें नीचे दिखाए अनुसार लिखा :

(a) $+ 6$ (b) $- 4$

(c) $(+ 5) + (+ 3) = + 8$ (d) $(- 6) + (-2) = - 4$

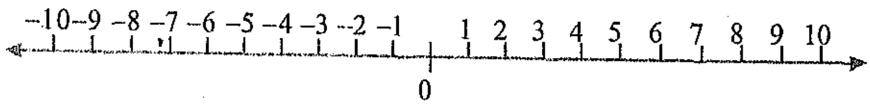
(e) $(- 5) + (+ 12) = + 7$ (f) $(- 8) + (+5) = - 3$

(g) $(+7) + (-10) = 17$

उसने कुछ गलतियाँ की हैं। क्या आप उसके उत्तरों की जाँच कर सकते हैं और गलतियों को सही कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

भूमि पर क्षैतिज संख्या रेखा के रूप में एक आकृति खींचिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है। उपरोक्त उदाहरण में दिए प्रश्नों की ही तरह कुछ प्रश्न बनाइए और फिर उन्हें अपने मित्रों को हल करने के लिए कहिए।



एक खेल

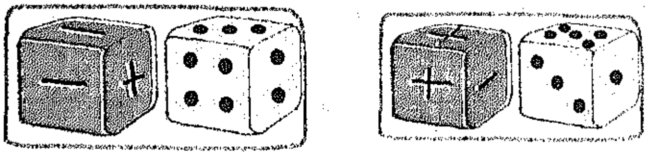
एक संख्या पट्टी लीजिए जिस पर + 25 से – 25 तक के पूर्णांक लिखे हों।



दो पासे लीजिए जिनमें से एक पर 1 से 6 तक की संख्याएँ अंकित हों और दूसरे पर तीन '+' चिह्न और तीन '–' चिह्न अंकित हों।

खिलाड़ी भिन्न-भिन्न रंगों के बटन [(या प्लास्टिक के काउंटर (Counter)] संख्या पट्टी पर 0 स्थान पर रखेंगे। दोनों पासों को प्रत्येक बार फेंकने के बाद, खिलाड़ी देखेगा कि उसने उन पासों पर क्या प्राप्त किया है। यदि पहले पासे पर 3 और दूसरे पासे पर – आता है, तो उसे – 3 प्राप्त हुआ है। यदि पहला पासा 5 दर्शाता है और दूसरा पासा '+' दर्शाता है, तो उसे + 5 प्राप्त हुआ है।

– 3 + 5

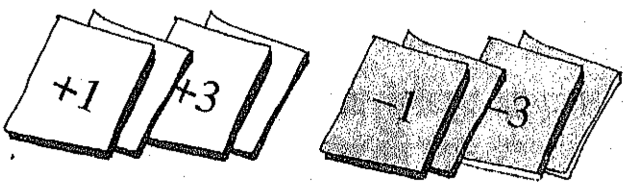


जब किसी खिलाड़ी को + चिह्न प्राप्त होता है, तो वह आगे की दिशा में (+ 25 की ओर) चलता है और जब किसी खिलाड़ी को – चिह्न प्राप्त होता है, तो वह पीछे की ओर (– 25 की ओर) चलता है।

प्रत्येक खिलाड़ी दोनों पासों को एक साथ फेंकता है। वह खिलाड़ी जिसका बटन (या काउंटर) – 25 को छू लेता है, वह खेल से बाहर हो जाता है और वह खिलाड़ी जिसका बटन (या काउंटर) + 25 को छू लेता है, वह खेल में जीत जाता है।

आप इसी खेल को ऐसे 12 कार्ड लेकर जिन पर + 1, + 2, + 3, + 4, + 5 और + 6 तथा – 1, – 2, – 3, – 4, – 5 और – 6 अंकित हो, भी खेल सकते हैं। कार्ड निकालने के प्रत्येक प्रयत्न के बाद उन्हें फेंट लीजिए।

कमला, रेशमा और मीनू इस खेल को खेल रही हैं



कमला ने तीन लगातार प्रयत्नों में + 3, + 2, + 6 प्राप्त किया। उसने अपना काउंटर

+ 1 1 पर रख दिया। रेशमा ने – 5, + 3 और + 1 प्राप्त किया। उसने अपना काउंटर – 1 पर रख दिया। मीनू ने तीन लगातार प्रयत्नों में + 4, – 3 और – 2 प्राप्त किया। उसका काउंटर किस स्थान पर रखा जाएगा? –1 पर या + 1 पर?

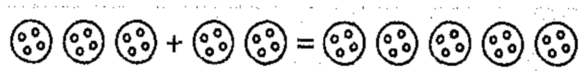
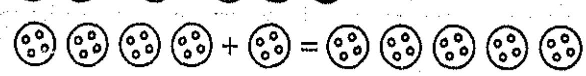
इन्हें कीजिए

दो भिन्न-भिन्न रंगों के सफ़ेद और काले रंगों के दो बटन लीजिए। आइए एक सफ़ेद बटन को (+ 1) और एक काले बटन को (– 1) से व्यक्त करें। एक सफ़ेद बटन (+ 1) और एक काले बटन (– 1) का युग्म शून्य व्यक्त करेगा, अर्थात् [1 + (– 1) = 0]

निम्नलिखित सारणी में, पूर्णांकों को रंगीन के बटनों की सहायता से दिखाया गया है :

रंगीन बटन	पूर्णांक
	5
	– 3
	0

आइए इन रंगीन बटनों की सहायता से पूर्णांकों को जोड़े। निम्नलिखित सारणी को देखिए और उसे पूरा कीजिए :

	(+ 3) + (+ 2) = +5
	(– 2) + (– 1) = –3
	....
	....

जब आप दो धनात्मक संख्याएँ प्राप्त करें, तो उन्हें जोड़िए। जैसे (+3) + (+2) = +5 [= 3 + 2] है। जब आप दो ऋणात्मक संख्याएँ प्राप्त करें, तो भी उन्हें जोड़िए, परंतु उत्तर में ऋण चिह्न (–) लगा दें। जैसे (–2) + (–1) = –3 है।

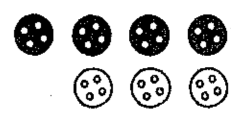
निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

(a) (– 11) + (– 12) (b) (+ 10) + (+ 4)

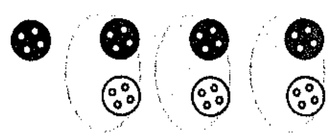
(c) (– 32) + (– 25) (d) (+ 23) + (+ 40)

अब इन्हीं बटनों की सहायता से एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़िए। बटनों को युग्मों में हटाइए, अर्थात् 1 सफेद बटन और 1 काले बटन को साथ लेकर हटाइए [चूँकि (+ 1) + (– 1) = 0]। शेष बटनों की जाँच कीजिए।

(a) (– 4) + (+ 3)



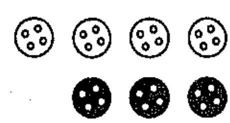
= (– 1) + (– 3) + (+ 3)



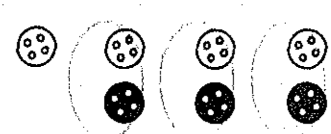
= (– 1) + 0 = – 1



(b) (+ 4) + (– 3)



= (+ 1) + (+ 3) + (– 3)



= (+ 1) + 0 = + 1



आप देख सकते हैं कि 4 – 3 का उत्तर 1 है और – 4 + 3 = – 1 है।

अतः, जब आपको एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ना हो, तो आपको इन पूर्णांकों के संख्यात्मक मानों (numerical

values) को देखकर, (दोनों संख्याओं में बड़ी संख्या जाँचने के लिए उनके साथ लगे + या – चिह्नों को छोड़ दीजिए)। सहायता के लिए कुछ और उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं :

(c) $(+5) + (-8) = (+5) + (-5) + (-3) = 0 + (-3) = (-3)$

(d) $(+6) + (-4) = (+2) + (+4) + (-4) = (+2) + 0 = +2$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में प्रत्येक का योग ज्ञात कीजिए :

(a) $(-7) + (+8)$ (b) $(-9) + (+13)$

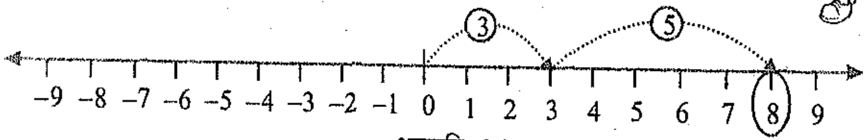
(c) $(+7) + (-10)$ (d) $(+12) + (-7)$

6.3.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का जोड़ना (योग)



भिन्न-भिन्न रंगों के बटनों का प्रयोग करके पूर्णांकों को जोड़ना सदैव सरल नहीं होता है। क्या हमें जोड़ने के लिए, संख्या रेखा का प्रयोग करना चाहिए?

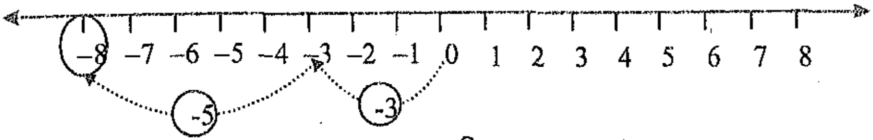
(i) आइए संख्या रेखा पर 3 और 5 को जोड़ें।



आकृति 6.4

संख्या रेखा पर, पहले हम 0 से प्रारंभ करके 0 के दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और 3 पर पहुँचते हैं। फिर हम 3 के दाईं ओर 5 कदम चलते हैं और 8 पर पहुँचते हैं (आकृति 6.4)। इस प्रकार, हमें $3 + 5 = 8$ प्राप्त होता है।

(ii) आइए संख्या रेखा पर – 3 और – 5 को जोड़ें



आकृति 6.5

संख्या रेखा पर, पहले हम 0 से प्रारंभ करके 0 के बाईं ओर 3 कदम चलते हैं और – 3 पर पहुँचते हैं। फिर हम – 3 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं और – 8 पर पहुँचते हैं (आकृति 6.5)।

इस प्रकार, हमें (– 3) + (– 5) = – 8 प्राप्त होता है।

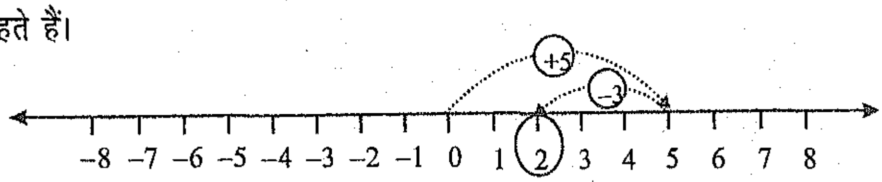
हम देखते हैं कि जब हम किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं, तो योग एक धनात्मक पूर्णांक होता है। जब हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं, तो योग एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

उपरोक्त से यह भी स्पष्ट होता है कि यदि किसी संख्या में एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाए, तो प्राप्त योग उस संख्या से बड़ा होता है तथा यदि किसी संख्या में एक ऋणात्मक पूर्णांक जोड़ा जाए, तो प्राप्त योग उस संख्या से छोटा होता है। इसकी जाँच करने के लिए, संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों को संख्या रेखा की सहायता से जोड़िए :

(a) (– 2) + (– 4) (b) (+ 4) + (+ 1)

(c) (– 1) + (– 6) (d) (+ 5) + (+ 6)

(iii) मान लीजिए हम संख्या रेखा पर (+ 5) और (– 3) का योग ज्ञात करना चाहते हैं।



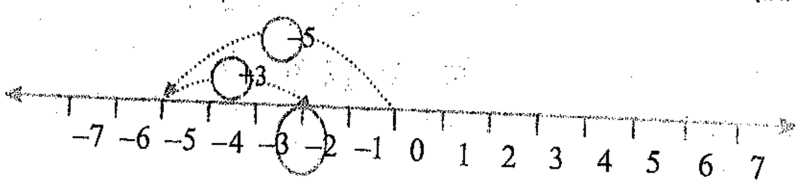
आकृति 6.6

पहले हम, संख्या रेखा पर 0 से प्रारंभ करके 0 के दाईं ओर 5 कदम चलते हैं

और 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम 5 के बाईं ओर 3 कदम चलते हैं और 2 पर पहुँचते हैं। (आकृति 6.6)

इस प्रकार, (+ 5) + (– 3) = 2 है।

(iv) इसी प्रकार, आइए संख्या रेखा पर (– 5) और (+ 3) का योग ज्ञात करें



आकृति 6.7

पहले हम 0 से प्रारंभ करके, 0 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं और – 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम – 5 के दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और – 2 पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार, (– 5) + (+3) = – 2 है। (आकृति 6.7)

प्रयास कीजिए

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए :

(a) (– 2) + 6 (b) (– 6) + 2

ऐसे दो और प्रश्न बनाइए तथा संख्या रेखा की सहायता से उन्हें हल कीजिए।

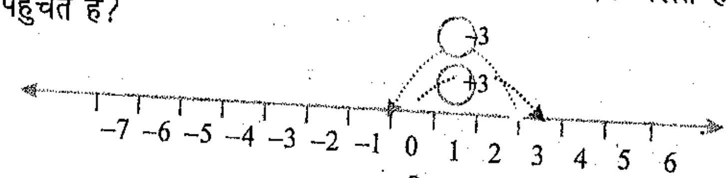
2. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

(a) (+ 7) + (– 11) (b) (– 13) + (+ 10)

(c) (– 7) + (+ 9) (d) (+ 10) + (– 5)

ऐसे पाँच प्रश्न और बनाइए तथा उन्हें हल कीजिए।

आइए 3 और – 3 को जोड़ें। पहले हम 0 से प्रारंभ करके, 0 के दाईं ओर 3 कदम चलकर 3 पर पहुँचते हैं। फिर हम 3 के बाईं ओर 3 कदम चलते हैं। अंत में हम कहाँ पहुँचते हैं?



आकृति 6.8

आकृति 6.8 से, हम देख सकते हैं कि हम 0 पर पहुँच गए हैं। अत: 3 + (– 3) = 0 है। इसी प्रकार, यदि हम 2 और – 2 को जोड़े, तो हमें 0 प्राप्त होगा। इस प्रकार, संख्या युग्मों 3 और – 3, 2 और – 2, इत्यादि संख्याओं को जोड़ने पर 0 प्राप्त होता है। ऐसी संख्याएँ एक दूसरे के **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** कहलाती हैं।

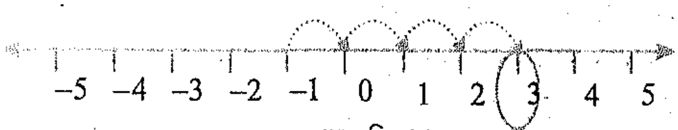
6 का योज्य प्रतिलोम क्या है? – 7 का योज्य प्रतिलोम क्या है?

उदाहरण 3 : संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, वह पूर्णांक लिखिए, जो

(a) –1 से 4 अधिक है।

(b) 3 से 4 कम है।

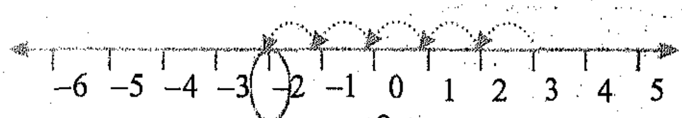
हल : (a) हम वह पूर्णांक ज्ञात करना चाहते हैं जो –1 से 4 अधिक है। इसलिए, हम –1 से प्रारंभ करते हैं और –1 के दाईं ओर 4 कदम चलते हैं। इससे हम 3 पर पहुँच जाते हैं, जैसा कि नीचे आकृति 6.9 में दर्शाया गया है।



आकृति 6.9

अत:, –1 से 4 अधिक पूर्णांक 3 है।

(b) हम वह पूर्णांक ज्ञात करना चाहते हैं, जो 3 से 5 कम है। इसलिए, हम 3 से प्रारंभ करते हैं और 3 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं। इस प्रकार, हम –2 पर पहुँच जाते हैं, जैसा कि आकृति 6.10 में नीचे दिखाया गया है।



आकृति 6.10

अत:, 3 से 5 कम पूर्णांक –2 है।

उदाहरण 4 : योग (– 9) + (+ 4) + (– 6) + (+ 3) ज्ञात कीजिए।

हल : हम संख्याओं को इस प्रकार पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं कि धनात्मक पूर्णांक एक समूह में हों और ऋणात्मक पूर्णांक एक समूह में हों। इस प्रकार

(– 9) + (+ 4) + (– 6) + (+ 3)

= (– 9) + (– 6) + (+ 4) + (+ 3) = (– 15) + (+ 7)

= – 8 + (– 7) + (+ 7) = – 8 + 0 = – 8

उदाहरण 5 : (30) + (– 23) + (– 63) + (+ 55) का मान ज्ञात कीजिए।

हल : (30) + (+ 55) + (– 23) + (– 63)

= 85 + (– 86) = – 1

उदाहरण 6 : (– 10), (92), (84) और (– 15) का योग ज्ञात कीजिए।

हल : (– 10) + (92) + (84) + (– 15)

= (– 10) + (– 15) + 92 + 84

= (– 25) + 176 = 151

प्रश्नावली 6.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो
   (a) 5 से 3 अधिक है
   (b) –5 से 5 अधिक है
   (c) 2 से 6 कम है
   (d) –2 से 3 कम है
2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए :
   (a) 9 + (– 6)
   (b) 5 + (– 11)
   (c) (– 1) + (– 7)
   (d) (– 5) + 10
   (e) (– 1) + (– 2) + (– 3)
   (f) (– 2) + 8 + (– 4)
3. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना, निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए :
   (a) 11 + (– 7)
   (b) (– 13) + (+ 18)
   (c) (– 10) + (+ 19)
   (d) (– 250) + (+ 150)
   (e) (– 380) + (– 270)
   (f) (– 217) + (– 100)

4. निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

   (a) 137 और – 354 (b) – 52 और 52

   (c) – 312, 39 और 192 (d) – 50, – 200 और 300

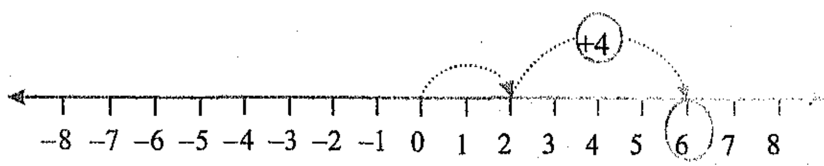
5. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

   (a) (– 7) + (– 9) + 4 + 16

   (b) (37) + (– 2) + (– 65) + (– 8)

6.4 संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का व्यवकलन (घटाना)

प्रत्येक व्यवकलन कथन के लिए, हमें संगत योग कथन प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ, व्यवकलन कथन 6 – 2 = 4 के लिए, हमें संगत योग कथन 6 = 4 + 2 प्राप्त है। अर्थात्, व्यवकलन कथन के लिए "यदि हम 6 में से 2 घटाते हैं, तो क्या प्राप्त होता है" हमें यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि "2 में क्या जोड़ा जाए कि 6 प्राप्त हो?" हम जानते हैं कि इसका उत्तर 4 है। आइए एक संख्या रेखा की सहायता से इसे समझने का प्रयत्न करें (आकृति 6.11)।

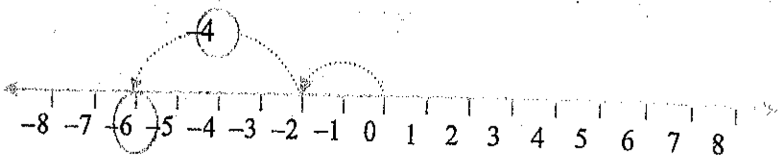


आकृति 6.11

यह दर्शाती है कि 6 प्राप्त करने के लिए, हमें 2 में 4 जोड़ना चाहिए।

आइए अब (– 6) – (– 2) का मान ज्ञात करें।

व्यवकलन कथन (– 6) – (– 2) = ☐ के लिए, संगत योग कथन (– 6) = ☐ + (– 2) है। अर्थात् (– 6) प्राप्त करने के लिए, (– 2) में क्या जोड़ा जाना चाहिए? संख्या रेखा यह दर्शाती है कि (– 6) प्राप्त करने के लिए (– 2) में (– 4) जोड़ना चाहिए। (आकृति 6.12)



आकृति 6.12

अतः, (– 6) – (– 2) = – 4 है।

परंतु हम जानते हैं कि (– 6) + (+ 2) = – 4 है।

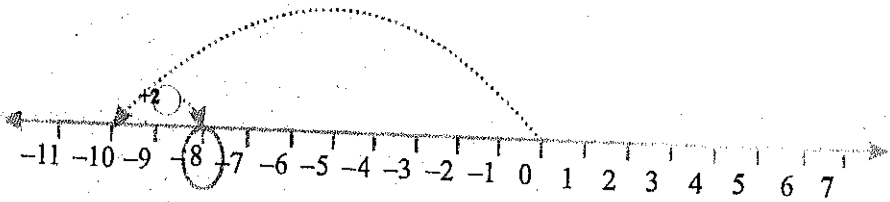
अतः, (– 6) में से (– 2) को घटाने के लिए यह पर्याप्त है कि (– 6) में (– 2) का योज्य प्रतिलोम जोड़ लिया जाए।

आइए व्यवकलन पर कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 7 (– 8) – (– 10) का मान ज्ञात कीजिए।

हल (– 8) – (– 10) = ☐ का अर्थ (– 8) = ☐ + (– 10) है।

संख्या रेखा हमें दर्शाती है कि (– 8) प्राप्त करने के लिए, हमें (– 10) में (+ 2) जोड़ना चाहिए (आकृति 6.13)



आकृति 6.13

परंतु हम जानते हैं कि (– 8) + (+ 10) = + 2 होता है।

अतः (– 8) में से (– 10) घटाने के लिए यह पर्याप्त है कि (– 8) में (– 10) का योज्य प्रतिलोम जोड़ लिया जाए। **इस प्रकार, एक पूर्णांक में से एक अन्य पूर्णांक घटाने के लिए, यह पर्याप्त है कि घटाए जाने वाले पूर्णांक के योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ लिया जाए।**

उदाहरण 5 (– 10) में से (– 4) को घटाइए।

हल $(-10) - (-4) = (-10) +$ (– 4 का योज्य प्रतिलोम)

$= -10 + 4 = -6$

उदाहरण 6 (– 3) में से (+ 3) को घटाइए।

हल $(-3) - (+3) = (-3) +$ (+ 3 का योज्य प्रतिलोम)

$= (-3) + (-3) = -6$

प्रश्नावली 6.3

1. घटाइए :
   (a) $35 - (20)$ (b) $72 - (90)$
   (c) $(-15) - (-18)$ (d) $(-20) - (13)$
   (e) $23 - (-12)$ (f) $(-32) - (-40)$
2. रिक्त स्थानों को >, < या = से भरिए :
   (a) $(-3) + (-6)$ ______ $(-3) - (-6)$
   (b) $(-21) - (-10)$ ______ $(-31) + (-11)$
   (c) $45 - (-11)$ ______ $57 + (-4)$
   (d) $(-25) - (-42)$ ______ $(-42) - (-25)$
3. रिक्त स्थानों को भरिए :
   (a) $(-8) +$ ______ $= 0$ (b) $13 +$ ______ $= 0$
   (c) $12 + (-12) =$ ______ (d) $(-4) +$ ______ $= -12$
   (e) ______ $- 15 = -10$
4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :
   (a) $(-7) - 8 - (-25)$ (b) $(-13) + 32 - 8 - 1$
   (c) $(-7) + (-8) + (-90)$ (d) $50 - (-40) - (-2)$

हमने क्या चर्चा की?

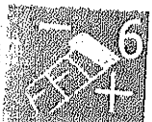
1. हमने देखा कि कई बार हमें ऋणात्मक चिह्नों वाली संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। यह तब होता है जब हम संख्या रेखा पर शून्य के नीचे जाएँ। ये ऋणात्मक संख्याएँ कहलाती हैं। इनका प्रयोग किए जाने वाले कुछ उदाहरण हैं तापमान, झील या नदी में पानी का स्तर, टैंक में तेल का स्तर इत्यादि। इनका प्रयोग उधार खाते या लेनदारी में भी होता है।

2. ..., – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 2, 3, 4, ... जैसी संख्याओं के संग्रह को पूर्णांक कहते हैं। अत: – 1, – 2, – 3, – 4, ... ऋणात्मक संख्याएँ है जिन्हें ऋणात्मक पूर्णांक कहा जाता है और 1, 2, 3, 4, ... धनात्मक संख्याएँ हैं जिन्हें धनात्मक पूर्णांक कहते हैं।

3. हमने यह भी देखा कि किसी दी हुई संख्या का एक अधिक उसकी परवर्ती संख्या होती है और एक कम लेने पर पूर्ववर्ती संख्या प्राप्त होती है।

4. हमने देखा

   (a) जब समान चिह्न हों तो, जोड़िए और वही चिह्न लगाइए।

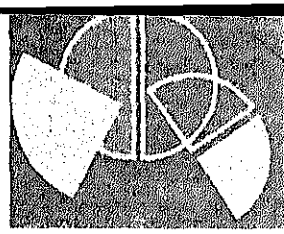
      (i) जब जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, हमें एक धनात्मक पूर्णांक मिलता है [जैसे, $(+3) + (+2) = +5$]

      (ii) जब जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक मिलता है [जैसे, $(-2) + (-1) = -3$]

   (b) जब हमारे पास अलग-अलग चिह्न हों तो घटाकर बड़ी संख्या का चिह्न लगा देते हैं।

   (c) जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हम उन्हें घटाते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न लगा देते हैं। बड़ी संख्या का अभिप्राय उस संख्या से है जिसका संख्यात्मक मान अधिक हो [जैसे, $(+4) + (-3) = +1$ और $(-4) + (+3) = -1$]

5. हमने दिखाया कि किस प्रकार पूर्णांकों का योग तथा व्यवकलन संख्या-रेखा पर दिखाया जा सकता है।



अध्याय 7

भिन्न

7.1 भूमिका

सुभाष ने IV और V कक्षा में भिन्नों (Fractions) के बारे में पढ़ा था। परंतु वह इस बारे में बहुत विश्वस्त नहीं था और इसीलिए जब भी उसे अवसर मिलता वह भिन्नों का प्रयोग करने का प्रयत्न करता था। एक अवसर तब आया जब वह घर से अपना लंच (lunch) लाना भूल गया। उसकी एक मित्र फरीदा ने उसे अपने साथ लंच करने के लिए आमंत्रित किया। उसके लंच बॉक्स में पाँच पूरियाँ थीं। इसलिए, सुभाष और फरीदा दोनों ने दो-दो पूरियाँ ले लीं। फिर फरीदा ने पाँचवीं पूरी के दो बराबर भाग (आधे भाग) किए और उनमें से एक-आधा (one half) भाग सुभाष को दे दिया और दूसरा आधा भाग स्वयं ले लिया। इस प्रकार, सुभाष और फरीदा दोनों ने दो पूर्ण पूरियाँ और एक आधी पूरी ली।

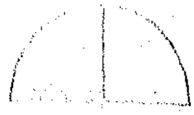


2 पूरियाँ + आधी पूरी-सुभाष   2 पूरियाँ + आधी पूरी-फरीदा

आपको अपने दैनिक जीवन में, किन परिस्थितियों में भिन्नों का सामना करना पड़ता है?

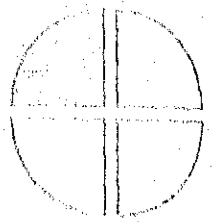
सुभाष जानता था कि एक-आधे (one-half) को $\frac{1}{2}$ लिखा जाता है। पूरी

खाते समय, उसने अपनी आधी पूरी को पुनः दो बराबर भागों में बाँट लिया और फरीदा से पूछा कि यह टुकड़ा पूर्ण पूरी का कौन सा भाग अथवा भिन्न है। (आकृति 7.1)



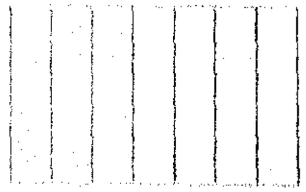
आकृति 7.1

बिना कोई उत्तर दिए, फरीदा ने भी अपनी आधी पूरी को दो बराबर भागों में बाँट लिया और सुभाष के भागों के साथ रख दिया। उसने कहा कि इन चारों बराबर भागों से मिलकर एक पूर्ण (whole) बनता है। (आकृति 7.2) अतः, प्रत्येक बराबर भाग एक पूर्ण पूरी का एक–चौथाई (One-fourth) है और ये चारों भाग मिलकर $\frac{4}{4}$ या 1 पूर्ण पूरी होगा।

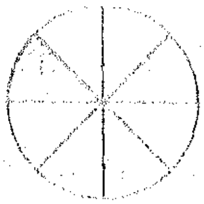


आकृति 7.2

खाते समय उन्होंने यह चर्चा की कि वे भिन्नों के बारे में पहले क्या पढ़ चुके हैं। 4 बराबर भागों में से 3 भाग $\frac{3}{4}$ दर्शाते हैं। इसी प्रकार, जब हम एक पूर्ण को 7 बराबर भागों में विभाजित (बाँट) कर उसमें से 3 भाग लें, तो $\frac{3}{7}$ प्राप्त होता है। (आकृति 7.3)। $\frac{1}{8}$ के लिए, हम एक पूर्ण को 8 बराबर भागों में बाँटते हैं और इनमें से एक भाग ले लेते हैं। (आकृति 7.4)



आकृति 7.3



आकृति 7.4

फरीदा ने कहा कि हम पढ़ चुके हैं कि भिन्न वह संख्या है जो एक पूर्ण (whole) का भाग निरूपित करती है। यह पूर्ण एक अकेली वस्तु हो सकती है अथवा वस्तुओं का एक समूह (group) भी हो सकता है। सुभाष ने देखा कि ये सभी भाग बराबर होने चाहिए।

7.2 एक भिन्न



आइए उपरोक्त चर्चा पर पुनर्विचार करें।

एक भिन्न का अर्थ है एक समूह का अथवा एक क्षेत्र (region) का एक भाग।

$\frac{5}{12}$ एक भिन्न है। हम इसे 'पाँच-बारहांश' (Five-twelveth) पढ़ते हैं।

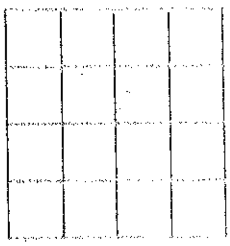
"12" क्या दर्शाता है? यह बराबर भागों की वह संख्या है जिनमें एक पूर्ण को बाँटा गया है।

"5" क्या दर्शाता है? यह बराबर भागों की वह संख्या है जो सभी 12 भागों में से लिए गए हैं।

यहाँ 5 अंश (numerator) और 12 हर (denominator) कहलाता है।

भिन्न $\frac{3}{7}$ का अंश बताइए। $\frac{4}{15}$ का हर क्या है?

यह खेल खेलिए :



आप अपने मित्रों के साथ इस खेल को खेल सकते हैं।

यहाँ दर्शाई हुई जाली या ग्रिड (grid) की कई प्रतियाँ लीजिए।

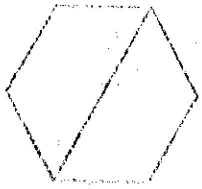
कोई भिन्न, मान लीजिए, $\frac{1}{2}$ पर विचार कीजिए।

आप में से प्रत्येक विद्यार्थी ग्रिड का $\frac{1}{2}$ भाग छायांकित करे।

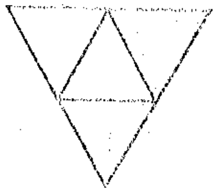
प्रतिबंध यह है कि आप में से किसी का भी छायांकित प्रतिरूप समान नहीं होना चाहिए।

प्रश्नावली 7.1

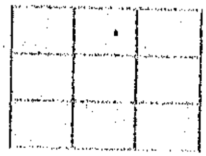
1. छायांकित भाग को निरूपित करने वाली भिन्न लिखिए :



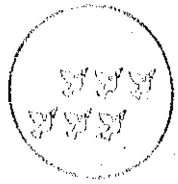
(i)



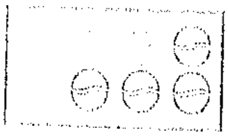
(ii)



(iii)



(iv)



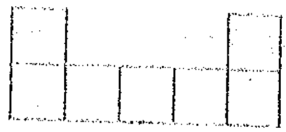
(v)



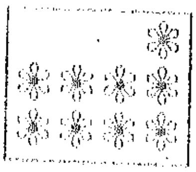
(vi)



(vii)



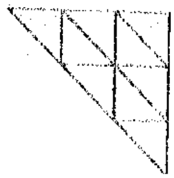
(viii)



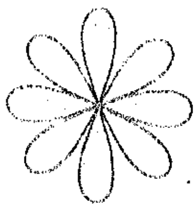
(ix)



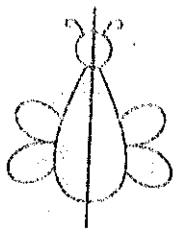
(x)



(xi)

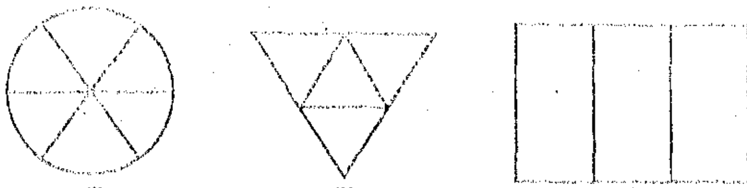


(xii)

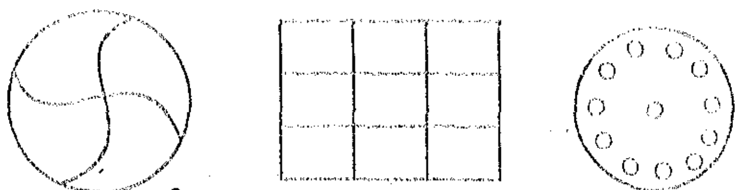


(xiii)

2. दी हुई भिन्न के अनुसार, भागों को छायांकित कीजिए :

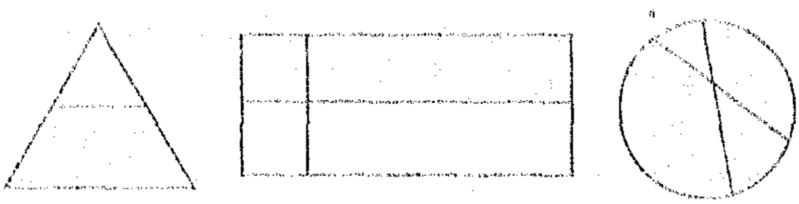


(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{2}{4}$ (iii) $\frac{1}{3}$



(iv) $\frac{3}{4}$ (v) $\frac{4}{9}$ (vi) $\frac{1}{4}$

3. निम्न में, यदि कोई गलती है, तो पहचानिए :



यह $\frac{1}{2}$ है यह $\frac{1}{4}$ है यह $\frac{3}{4}$ है

4. 8 घंटे एक दिन की कौन सी भिन्न है?
5. 40 मिनट एक घंटे की कौन सी भिन्न है?
6. आर्या, अभिमन्यु और विवेक एक साथ, बाँटकर खाना खाते हैं। आर्या दो सैंडविच लेकर आता है - एक सब्ज़ी वाला और दूसरा जैम (Jam) वाला। अन्य दो लड़के अपना खाना लाना भूल गए। आर्या अपने सैंडविचों को उन दोनों के साथ बाँटकर खाने को तैयार हो जाता है, ताकि प्रत्येक व्यक्ति को प्रत्येक सैंडविच में से बराबर भाग मिले।

   (a) आर्या अपनी सैंडविचों को किस प्रकार बाँटे कि प्रत्येक को बराबर भाग मिले?

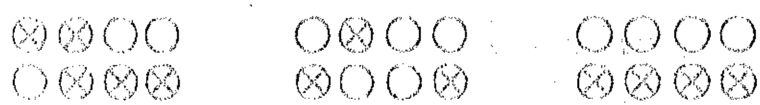
(b) प्रत्येक लड़के को एक सैंडविच का कौन-सा भाग मिलेगा?

7. कंचन के पास तीन फ्रॉक (frocks) हैं, वह उन्हें खेलने के समय पहनती है। फ्रॉक का कपड़ा अच्छा है, परंतु उनके रंग फीके पड़ गए हैं। उसकी माँ कुछ नीला रंग खरीदती है और इन फ्रॉकों में से दो फ्रॉकों को रंग देती है। कंचन की फ्राकों की कौन-सी भिन्न उसकी माँ ने रंग दी?

8. 2 से 12 तक की प्राकृत संख्याएँ लिखिए। इनमें से कौन सी भिन्न अभाज्य संख्याएँ प्रदर्शित करेगी?

9. 102 से 113 तक की प्राकृत संख्याएँ लिखिए। इनमें से कौन-सी भिन्न अभाज्य संख्याएँ प्रदर्शित करेगी?

10. उपरोक्त वृत्तों की कौन-सी भिन्नों में X है?



(a) (b) (c)

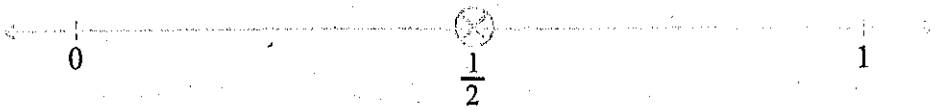
11. दिनेश, सुमित, राम, जॉय, मार्शल, इमरान, जयंत, बाबू, कबीर, और रोहन बास्केटबॉल खेलने का निर्णय लेते हैं। पहले पाँच लड़के एक टीम में हैं और शेष लड़के दूसरी टीम में हैं। पहली टीम में लड़कों की कौन-सी भिन्न है?

12. क्रिस्तिन अपने जन्म दिन पर एक सीडी प्लेयर (CD Player) प्राप्त करती है। वह तब से सीडी इकट्ठी करना प्रारंभ कर देती है। वह 3 सीडी खरीदती है और 5 सीडी उपहार के रूप में प्राप्त करती है। उसके द्वारा खरीदी गई सीडी की संख्या, कुल सीडी की संख्या की कौन-सी भिन्न है?

7.3 संख्या रेखा पर भिन्न

आप एक संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं 0,1,2... को दर्शाना सीख चुके हैं। क्या आप भिन्नों को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? आइए एक संख्या रेखा खींचें। क्या हम इस पर $\frac{1}{2}$ को दर्शा सकते हैं? हम जानते हैं कि $\frac{1}{2}$ संख्या 0 से बड़ी है और 1 से छोटी है। इसलिए इसे 0 से 1 के बीच में स्थित होना चाहिए।

चूँकि हमें $\frac{1}{2}$ को दर्शाना है, इसलिए हम 0 और 1 के बीच की दूरी को दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग को $\frac{1}{2}$ से दर्शाते हैं (जैसा कि आकृति 7.5 में दिखाया गया है)।



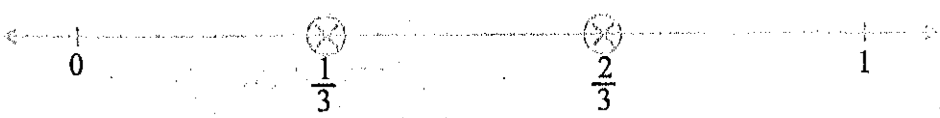
आकृति 7.5

संख्या रेखा पर $\frac{1}{3}$ को दर्शाने के लिए, 0 और 1 के बीच की दूरी को कितने बराबर भागों में विभाजित करना चाहिए? हम 0 और 1 के बीच की दूरी को 3 बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग को $\frac{1}{3}$ से दर्शाते हैं (जैसा कि आकृति 7.6 में दिखाया गया है।)।



आकृति 7.6

क्या हम इस संख्या रेखा पर $\frac{2}{3}$ को दर्शा सकते हैं? $\frac{2}{3}$ का अर्थ है 3 बराबर भागों में से 2 भाग, जैसा कि आकृति 7.7 में दिखाया गया है।



आकृति 7.7

इसी प्रकार, आप $\frac{0}{3}$ और $\frac{3}{3}$ संख्या रेखा पर किस प्रकार दर्शाएँगे?

$\frac{0}{3}$ बिंदु शून्य है और $\frac{3}{3}$ बिंदु 1 (जो पूर्ण है) है, जिन्हें संख्या रेखा पर आकृति 7.8 की तरह दर्शाया जा सकता है।



आकृति 7.8

अब यदि हमें एक संख्या रेखा पर $\frac{3}{7}$ को दर्शाना है, तो हम 0 और 1 के बीच की दूरी को कितने बराबर भागों में विभाजित करेंगे? यदि P भिन्न $\frac{3}{7}$ को दर्शाता है, तो शून्य और P के बीच कुल कितने बराबर भाग हैं? $\frac{0}{7}$ और $\frac{7}{7}$ कहाँ स्थित होंगे?

प्रयास कीजिए

1. संख्या रेखा पर $\frac{3}{5}$ को दर्शाइए।
2. संख्या रेखा पर $\frac{1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{5}{10}$ और $\frac{10}{10}$ को दर्शाइए।
3. क्या आप 0 और 1 के बीच कोई अन्य भिन्न को दर्शा सकते हैं? ऐसी पाँच भिन्न और लिखिए जिन्हें आप दर्शा सकते हैं और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाइए।
4. 0 और 1 के बीच में कितनी भिन्न स्थित हैं? सोचिए, चर्चा कीजिए और अपने उत्तर को लिखिए।

7.4 उचित भिन्न

अब आप सीख चुके हैं कि भिन्नों को संख्या रेखा पर किस प्रकार दर्शाया जाता है। अलग-अलग संख्या रेखाओं पर भिन्न $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{0}{3}, \frac{5}{8}$ की स्थिति दर्शाइए।

क्या इनमें से कोई भी भिन्न 1 के दाईं ओर है। ये सभी भिन्न 1 के बाईं ओर स्थित हैं, क्योंकि ये 1 से छोटी हैं। क्यों?

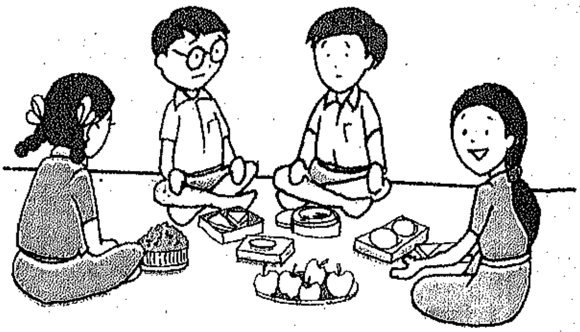
1 से छोटी भिन्न उचित भिन्न (proper fractions) कहलाती हैं। उचित भिन्न का अंश हर से छोटा होता है।

प्रयास कीजिए

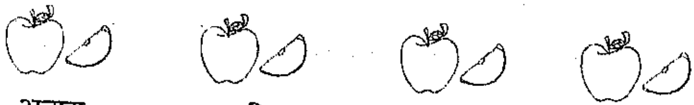
1. एक उचित भिन्न लिखिए :
   (a) जिसका अंश 5 और हर 7 है।
   (b) जिसका हर 9 है और अंश 5 है।
   (c) जिसके अंश और हर का योग 10 है। आप इस प्रकार की कितनी भिन्न लिख सकते हैं?
   (d) जिसका हर उसके अंश से 4 अधिक है।
   (कोई पाँच भिन्न बनाइए। आप और कितनी भिन्न बना सकते हैं)?
2. एक भिन्न दी हुई है। इसे देखकर, आप कैसे बता सकते हैं कि यह भिन्न
   (a) 1 से छोटी है? (b) 1 के बराबर है?
3. संकेत '>', '<' या '=' का प्रयोग करके, रिक्त स्थानों को भरिए :
   (a) $\frac{1}{2}\square\ 1$ (b) $\frac{3}{5}\square\ 1$ (c) $1\square\frac{7}{8}$
   (d) $\frac{4}{4}\square\ 1$ (e) $\frac{0}{6}\square\ 1$ (f) $\frac{2005}{2005}\square\ 1$

7.5 विषम भिन्न और मिश्रित भिन्न (संख्याएँ)

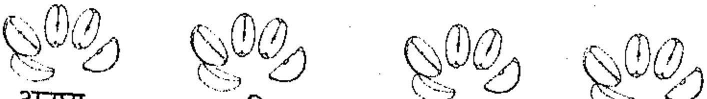
अनघा, रवि, रेशमा और जॉन ने अपना खाना बाँटकर खाया। अनघा पूरियाँ लाई, रवि रोटी लाया, रेशमा मिश्रित सब्ज़ी लाई और जॉन सैंडविच लाया। उन सभी ने रोटी, पूरी, सब्ज़ी और सैंडविचों को बाँटकर खाया। अपने साथ वे पाँच सेब भी लाए थे। खाना खाने के बाद चारों मित्र सेब खाना चाहते थे। वे चारों आपस में इन पाँच सेबों को किस प्रकार बाँट सकते हैं? iwjh



अनघा ने कहा, आओ हम सभी एक पूरा सेब और पाँचवे का एक-चौथाई ले लें।



रेशमा ने कहा यह ठीक है, परंतु हम प्रत्येक सेब को चार बराबर भागों में बाँट सकते हैं और प्रत्येक सेब का एक-चौथाई ले सकते हैं।



अनघा ने कहा, हाँ सेबों को बाँटने की दोनों विधियाँ समान ही हैं। प्रत्येक भाग को, 5 भाग 4 लिखा जा सकता है। रवि ने कहा, क्या तुम्हारा मतलब $5 \div 4$ है? जॉन ने कहा, हाँ इसे $\frac{5}{4}$ भी लिखा जा सकता है। अनघा न कहा, $\frac{5}{4}$ में अंश हर से बड़ा है। वे भिन्न जिनमें अंश हर से बड़ा होता है विषम भिन्न (improper fractions) कहलाती हैं।

इस प्रकार, $\frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{18}{5}$ प्रत्येक एक विषम भिन्न हैं।

1. हर 7 वाली पाँच विषम भिन्न लिखिए।
2. अंश 11 वाली पाँच विषम भिन्न लिखिए।

प्रत्येक मित्र द्वारा प्राप्त किए सेबों की भिन्न $\frac{5}{4}$ है। परंतु, जैसा अनघा ने कहा, यह एक सेब और उससे एक–चौथाई अधिक के बराबर है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। (आकृति 7.9)



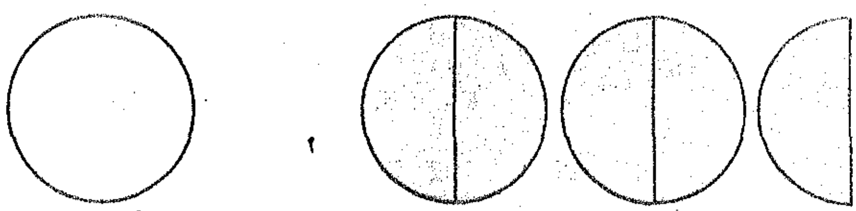
यह 1 है
(एक)

इनमें से प्रत्येक $\frac{1}{4}$ है
(एक–चौथाई)

आकृति 7.9

इस प्रकार, $1+\frac{1}{4}$ को $1\frac{1}{4}$ लिखा जाता है और यह वही है जो $\frac{5}{4}$ है।

याद कीजिए कि फरीदा ने कितनी पूरियाँ खाईं थीं। उसने $2\frac{1}{2}$ पूरियाँ खाईं थीं (आकृति 7.10)।



यह 1 है

यह $2\frac{1}{2}$ है

आकृति 7.10

हल : (a) $2\frac{3}{4} = \frac{(2\times4)+3}{4} = \frac{11}{4}$

(b) $7\frac{1}{9} = \frac{(7\times9)+1}{9} = \frac{64}{9}$

(c) $5\frac{3}{7} = \frac{(5\times7)+3}{7} = \frac{38}{7}$

इस प्रकार, हम एक मिश्रित भिन्न को एक विषम भिन्न के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए हम पूर्ण को हर से गुणा करके गुणनफल में अंश को जोड़ते हैं। फिर विषम भिन्न

$\frac{(\text{पूर्ण} \times \text{हर}) + \text{अंश}}{\text{हर}}$ होगा।

प्रश्नावली 7.2

1. संख्या रेखाएँ खींचिए और उन पर निम्नलिखित भिन्नों को बिंदु रूप में दर्शाइए:

   (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$ (c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

2. निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$

   (d) $\frac{28}{5}$ (e) $\frac{19}{6}$ (f) $\frac{35}{9}$

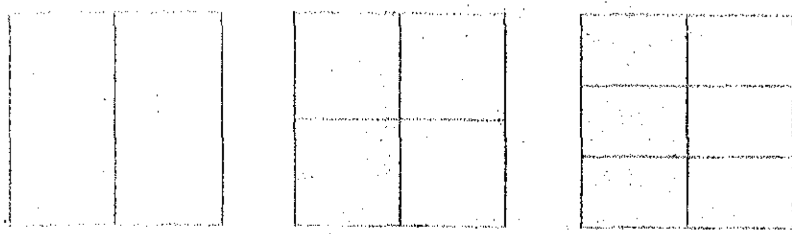
3. निम्नलिखित को विषम भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{7}$

   (d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$ (f) $8\frac{4}{9}$

7.6 तुल्य भिन्न

भिन्नों के निम्न निरूपणों को देखिए (आकृति 7.11):



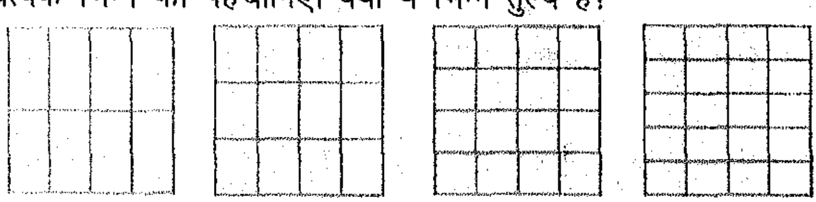
आकृति 7.11

ये भिन्न $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ हैं। जो कुल भागों में से लिए गए भागों को दर्शाती हैं। यदि हम इन भिन्नों के चित्रीय निरूपणों को एक दूसरे पर रखें, तो वे बराबर होंगे। क्या आप इससे सहमत हैं?

ऐसी भिन्न तुल्य भिन्न (Equivalent fractions) कहलाती हैं। ऐसी ही 3 और भिन्नों को बताइए जो ऊपर ली गई भिन्नों के तुल्य हों।

प्रयास कीजिए

1. क्या $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{7}$ तुल्य भिन्न है? कारण दीजिए।
2. क्या $\frac{2}{5}$ और $\frac{2}{7}$ तुल्य भिन्न है? कारण दीजिए।
3. क्या $\frac{2}{9}$ और $\frac{6}{27}$ तुल्य भिन्न है? कारण दीजिए।
4. चार तुल्य भिन्नों का एक अन्य उदाहरण दीजिए।
5. प्रत्येक भिन्न को पहचानिए। क्या ये भिन्न तुल्य हैं?



तुल्य भिन्नों को समझना

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{36}{72}, \ldots$, में से सभी तुल्य भिन्न हैं। ये एक पूर्ण का समान भाग निरूपित करती हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

तुल्य भिन्न एक पूर्ण का समान भाग क्यों निरूपित करती हैं? हम इनमें से एक भिन्न को अन्य भिन्न से किस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं?

$\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{4}$ पर विचार कीजिए। दूसरी भिन्न का अंश पहली भिन्न के अंश का दोगुना है और दूसरी भिन्न का हर भी पहली भिन्न के हर का दोगुना है।

इसका क्या अर्थ है?

इसका अर्थ $\frac{2}{4} = \frac{1 \quad 2}{2 \quad 2}$

इसी प्रकार, $\frac{3}{6} = \frac{1 \quad 3}{2 \quad 3} = \frac{1}{2}$

और $\frac{1}{2} = \frac{1 \quad 4}{2 \quad 4} = \frac{4}{8}$

एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए, आप उसके अंश और हर को एक समान शून्येतर संख्या से गुणा कर सकते हैं।

रजनी कहती है कि $\frac{1}{3}$ की समतुल्य भिन्न हैं :

$\frac{1\times 2}{3\times 2} = \frac{2}{6}, \quad \frac{1\times 3}{3\times 3} = \frac{3}{9}, \quad \frac{1\times 4}{3\times 4} = \frac{4}{12}$ इत्यादि।

क्या आप उससे सहमत हैं? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

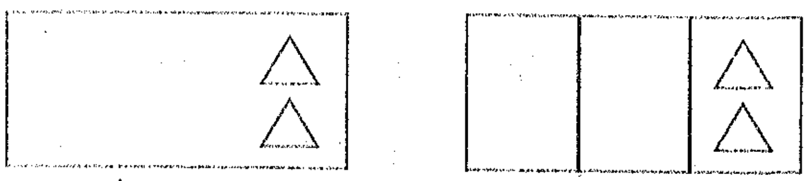
प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक की पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए :

   (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{9}$

अन्य विधि :

क्या तुल्य भिन्न ज्ञात करने की कोई अन्य विधि भी है? आकृति 7.12 को देखिए :



यहाँ $\frac{4}{6}$ छायांकित है यहाँ $\frac{2}{3}$ छायांकित है।

आकृति 7.12

ये समान क्षेत्रफल ढ़क रहे हैं अर्थात् $\frac{4}{6}$ और $\frac{2}{3}$ तुल्य भिन्न हैं।

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

एक दी हुई भिन्न के तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए हम उस भिन्न के अंश और हर को एक समान शून्येतर संख्या से भाग दे सकते हैं।

$\frac{12}{15}$ के तुल्य एक भिन्न $\frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$ है।

क्या आप $\frac{9}{15}$ के तुल्य एक ऐसी भिन्न ज्ञात कर सकते हैं जिसका हर 5 हो?

उदाहरण 3 : $\frac{2}{5}$ के तुल्य ऐसी भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका अंश 6 है।

दी हुई भिन्न $\frac{2}{5}$ है। वाँछित भिन्न का अंश 6 होना चाहिए।

हम जानते हैं कि $2 \times 3 = 6$ है। इसका अर्थ है कि तुल्य भिन्न प्राप्त करने के लिए, हमें दी हुई भिन्न के अंश और हर को 3 से गुणा करना चाहिए।

इस प्रकार, $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

अत:, वाँछित तुल्य भिन्न $\frac{6}{15}$ है

क्या आप इसे चित्रीय रूप से दर्शा सकते हैं?

$\frac{15}{35}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 7 हो।

हमें प्राप्त है : $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$

हम हरों को देखें। चूँकि $35 \div 5 = 7$ है, इसलिए हम $\frac{15}{35}$ के अंश को भी 5 से भाग देंगे।

हमें प्राप्त होता है $\frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$

इस प्रकार $\square$ को 3 से प्रतिस्थापित कर हम $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ प्राप्त करते हैं।

एक रोचक तथ्य :

तुल्य भिन्नों के बारे में एक बात बहुत रोचक है। दी हुई सारणी को पूरा कीजिए। पहली दो पंक्तियाँ पूरी कर दी गई हैं।

तुल्य भिन्न	पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल	दूसरी के अंश और पहली के हर का गुणनफल	क्या गुणनफल समान है?
$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$	$1\times 9=9$	$3\times 3=9$	हाँ
$\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$	$4\times 35=140$	$5\times 28=140$	हाँ
$\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$			
$\frac{3}{7}=\frac{24}{56}$			

उपरोक्त सारणी से हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं? इन सभी में, पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल दूसरी के अंश और पहली के हर के गुणनफल के बराबर है। आप अन्य भिन्न लेकर भी इसकी जाँच कर सकते हैं। क्या आप तुल्य भिन्नों का कोई ऐसा युग्म प्राप्त करते हैं जिसके लिए उपरोक्त कथन सत्य नहीं है? इस नियम से कभी-कभी तुल्य भिन्नों को ज्ञात करने में सहायता मिलती है।

$\frac{2}{9}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 63 है।

हमें प्राप्त है, $\frac{2}{9}=\frac{\square}{63}$

इसलिए $9\times\square=2\times 63$.

अतः, $\square=\frac{2\times 63}{9}=14$

इसलिए, वांछित तुल्य भिन्न $\frac{14}{63}$ है।

7.7 भिन्न का सरलतम रूप

एक भिन्न $\frac{36}{54}$ दी हुई है। आइए इसके तुल्य एक ऐसी भिन्न प्राप्त करने का प्रयत्न करें जिसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हों।

हम ऐसा कैसे करते हैं? हम जानते हैं कि 36 और 54 दोनों 2 से विभाज्य हैं।

इसलिए, $\frac{36}{54} = \frac{36 \div 2}{54 \div 2} = \frac{18}{27}$

परंतु 18 और 27 में भी 1 के अतिरिक्त अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं। ये उभयनिष्ठ गुणनखंड 1, 3 और 9 हैं।

अतः, $\frac{18}{27} = \frac{18 \div 9}{27 \div 9} = \frac{2}{3}$

चूँकि 2 और 3 में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। इसलिए वाँछित भिन्न $\frac{2}{3}$ है। इस प्रकार की भिन्न सरलतम रूप (simplest form) की भिन्न कहलाती है। इस प्रकार, **एक भिन्न सरलतम रूप (simplest form) या न्यूनतम रूप (lowest form) में तब कही जाती है, जब उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।**

सबसे छोटा रास्ता :

सरलतम रूप में तुल्य भिन्न ज्ञात करने का सबसे छोटा रास्ता यह है कि दी हुई भिन्न के अंश और हर का म.स. निकाला जाए और फिर अंश और हर दोनों को इस म.स. से भाग दे दिया जाए। इस प्रकार, सरलतम रूप में तुल्य भिन्न प्राप्त हो जाएगी।



भिन्न $\frac{36}{24}$ को लीजिए

36 और 24 का म.स. 12 है।

अतः, $\frac{36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{3}{2}$

इस प्रकार, म.स. की अवधारणा एक भिन्न को न्यूनतम (या सरलतम) रूप में बदलने में हमारी सहायता करती है।

एक खेल

यहाँ दी हुई समतुल्य भिन्न बहुत रोचक है। प्रत्येक में 1 से 9 तक के अंक एक बार प्रयोग किए गए हैं।

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$$

क्या आप ऐसी दो और समतुल्य भिन्न ज्ञात कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

1. निम्न को सरलतम में लिखिए :

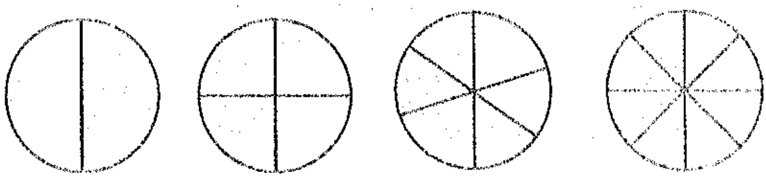
   (i) $\frac{15}{75}$ (ii) $\frac{16}{72}$ (iii) $\frac{17}{51}$ (iv) $\frac{42}{28}$ (v) $\frac{80}{24}$

2. क्या $\frac{169}{289}$ अपने सरलतम रूप में है?

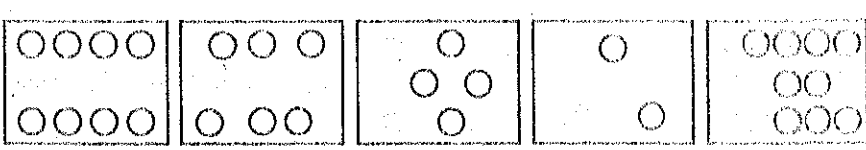
प्रश्नावली 7.3

1. प्रत्येक चित्र में छायांकित भागों के लिए भिन्न लिखिए। क्या ये सभी भिन्न तुल्य हैं?

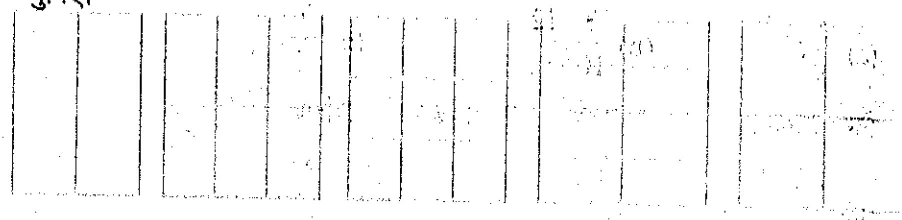
(a)



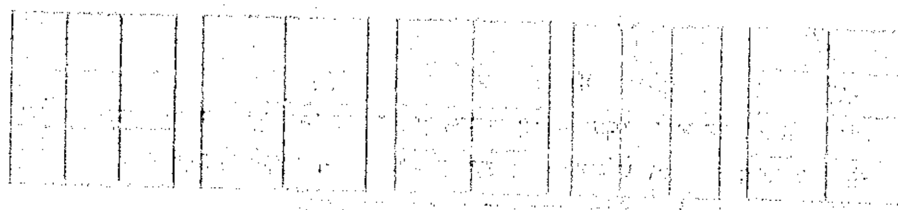
(b)



2. छायांकित भागों के लिए भिन्नों को लिखिए और प्रत्येक पंक्ति में से तुल्य भिन्नों को चुनिए।



(a) (b) (c) (d) (e)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

3. निम्न में से प्रत्येक में □ को सही संख्या से प्रतिस्थापित कीजिए :

(a) $\frac{2}{7}=\frac{8}{\square}$ (b) $\frac{5}{8}=\frac{10}{\square}$ (c) $\frac{3}{5}=\frac{\square}{20}$

(d) $\frac{45}{60}=\frac{15}{\square}$ (e) $\frac{18}{24}=\frac{\square}{4}$

4. $\frac{3}{5}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका

(a) हर 20 है (b) अंश 9 है

(c) हर 30 है (d) अंश 27 है

5. $\frac{36}{48}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका

(a) अंश 9 है (b) हर 4 है

6. जाँच कीजिए कि निम्न भिन्न तुल्य हैं या नहीं :

(a) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

7. निम्नलिखित भिन्नों को उनके सरलतम रूप में बदलिए :

(a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{84}{98}$

(d) $\frac{12}{52}$ (e) $\frac{7}{28}$

8. रमेश के पास 20 पेंसिल थीं। शीलू के पास 50 पेंसिल और जमाल के पास 80 पेंसिल थीं। 4 महीने के बाद, रमेश ने 10 पेंसिल प्रयोग कर लीं, शीलू ने 25 पेंसिल प्रयोग कर लीं और जमाल ने 40 पेंसिल प्रयोग कर लीं। प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों की कौन-सी भिन्न प्रयोग कर ली? जाँच कीजिए कि प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों की समान भिन्न प्रयोग की है।

9. तुल्य भिन्नों का मिलान कीजिए और प्रत्येक के लिए दो भिन्न और लिखिए :

(i)	$\frac{250}{400}$	(*a*)	$\frac{2}{3}$
(ii)	$\frac{180}{200}$	(*b*)	$\frac{2}{5}$
(iii)	$\frac{660}{990}$	(*c*)	$\frac{1}{2}$
(iv)	$\frac{180}{360}$	(*d*)	$\frac{5}{8}$
(v)	$\frac{220}{550}$	(*e*)	$\frac{9}{10}$

7.8 समान भिन्न

समान हर वाली भिन्न, समान भिन्न (like fractions) कहलाती हैं।

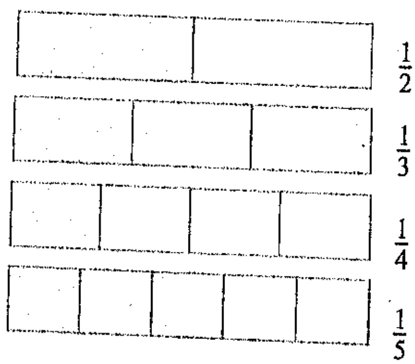
इस प्रकार, $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{8}{15}$ सभी समान भिन्न हैं।

क्या $\frac{7}{27}$ और $\frac{7}{28}$ समान भिन्न हैं? इनके हर भिन्न हैं। अतः ये समान भिन्न नहीं हैं। ये **असमान भिन्न (unlike fractions)** कहलाती हैं।

समान भिन्नों के पाँच युग्म और असमान भिन्नों के पाँच युग्म लिखिए।

7.9 भिन्नों की तुलना

सोहनी के पास $3\frac{1}{2}$ पेंसिल हैं और रीता के पास $\frac{10}{4}$ पेंसिल हैं। किसके पास अधिक पेंसिल हैं? इस प्रश्न का उत्तर सरल प्रतीत होता है, क्योंकि रीता के पास $\frac{10}{4}$ पेंसिल हैं, जो $2\frac{2}{4}$ पेंसिलों के तुल्य हैं। स्पष्ट है कि सोहनी के पास 3 से अधिक पेंसिल हैं और रीता के पास 3 से कम पेंसिल हैं। अतः, सोहनी के पास अधिक पेंसिल हैं।



आकृति 7.13

अब कुछ अन्य भिन्नों $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{5}$ पर विचार कीजिए (आकृति 7.13)। क्या आप बता सकते हैं कि कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी है?

क्या यह $\frac{1}{5}$ है? क्यों नहीं?

यदि $\frac{1}{2}$ सबसे बड़ी भिन्न है, तो क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हर जितना छोटा होगा, भिन्न उतनी ही बड़ी होगी। परंतु क्या यह सदैव सत्य है कि हर छोटा होने पर भिन्न बड़ी होगी? अर्थात् क्या हर बड़ा होने पर भिन्न छोटी होगी? $\frac{1}{5}$ और $\frac{3}{10}$ के बारे में सोचिए। कौन सी भिन्न बड़ी है?

प्रयास कीजिए

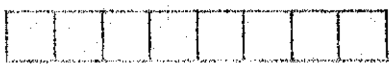
1. आप जूस की बोतल का $\frac{1}{5}$वाँ भाग प्राप्त करते हैं और आपकी बहन को उस बोतल का एक-तिहाई भाग मिलता है। किसको अधिक जूस मिलता है?

7.9.1 समान भिन्नों की तुलना

समान हर वाली भिन्न, समान भिन्न होती हैं। इनमें से कौन सी भिन्न समान भिन्न हैं?

$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}$

चूँकि समान भिन्नों में हर समान होते हैं, इसलिए उनकी तुलना करने के लिए, हम केवल यह देखते हैं कि किसका अंश बड़ा है। उदाहरणार्थ, कौन-सी भिन्न छोटी है? $\frac{2}{8}$ या $\frac{8}{8}$

 $\frac{2}{8}$  $\frac{8}{8}$

स्पष्ट है कि $\frac{2}{8}$ छोटी है।

इसी प्रकार, $\frac{5}{8}$ और $\frac{2}{8}$ में $\frac{5}{8}$ बड़ी है, इत्यादि

दो समान भिन्नों की तुलना करने के लिए, उनके अंशों की तुलना करना ही पर्याप्त है।

अतः, कौन-सी भिन्न बड़ी है : $\frac{7}{10}$ या $\frac{15}{10}$?

प्रयास कीजिए

1. कौन-सी भिन्न बड़ी है?

   (i) $\frac{7}{10}$ या $\frac{8}{10}$ (ii) $\frac{11}{24}$ या $\frac{13}{24}$ (iii) $\frac{17}{102}$ या $\frac{12}{102}$

ऐसी भिन्नों की तुलना करना क्यों सरल है?

2. निम्न को आरोही क्रम में लिखिए और साथ ही अवरोही क्रम में भी लिखिए:

   (a) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$

   (b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{11}{5}$

   (c) $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{11}{7}, \frac{13}{7}, \frac{15}{7}$

7.9.2 असमान भिन्नों की तुलना

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ और $\frac{1}{9}$ पर विचार कीजिए। क्या हम कह सकते हैं कि कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी है? स्पष्ट है कि भिन्न $\frac{1}{2}$ सबसे बड़ी है, क्योंकि यह भिन्न एक पूर्ण के जो बराबर भाग निरूपित करती है वह अन्य भिन्नों द्वारा निरूपित एक पूर्ण के बराबर भागों से बड़ा है। दूसरी ओर, $\frac{1}{9}$ सबसे छोटी भिन्न है, क्योंकि यह एक पूर्ण का सबसे छोटा बराबर भाग निरूपित करती है। प्रत्येक स्थिति में, केवल एक बराबर भाग लिया गया है।

अब आइए कुछ अन्य भिन्न $\frac{2}{1}, \frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{10}$ और $\frac{2}{3}$ को देखें।

क्या हम बता सकते हैं कि इनमें से कौन-सी भिन्न सबसे छोटी है और कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी है? यहाँ प्रत्येक स्थिति में 2 बराबर भाग लिए गए हैं। इनमें से सबसे बड़ा बराबर भाग पहली भिन्न में है, जिसमें लिया गया प्रत्येक भाग स्वयं एक पूर्ण है। इनमें सबसे छोटा भाग $\frac{2}{13}$ में लिया गया है। अतः, यह स्पष्ट है कि भिन्न $\frac{2}{13}$ सबसे छोटी है और भिन्न $\frac{2}{1}$ सबसे बड़ी है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए:

   (a) $\frac{1}{12}, \frac{1}{23}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}$

   (b) $\frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{13}, \frac{3}{4}, \frac{3}{17}$

   (c) उपरोक्त प्रकार के तीन और उदाहरण लिखिए तथा उन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।

हम ऐसी भिन्नों की तुलना किस प्रकार करते हैं जिनके हर और अंश भिन्न-भिन्न हों?

मान लीजिए हम दो असमान भिन्न $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ की तुलना करना चाहते हैं। ऐसा करना संभव हो जाएगा, यदि हम दोनों भिन्नों के हरों के भाग किसी तरह से बराबर बना लें, अर्थात् उनके हर बराबर बना लें। एक बार ऐसा कर लेने पर जो समान भिन्न प्राप्त होगी उसके अंशों के भागों की तुलना करके भिन्नों की तुलना सरलता से की जा सकती है।

आइए पुनः $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ को लें, इनमें कौन सी भिन्न बड़ी है? हम किस प्रकार समान हर बनाएँ? हम दोनों की तुल्य भिन्न ज्ञात करते हैं।

अब, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=....$

इसी प्रकार, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=....$

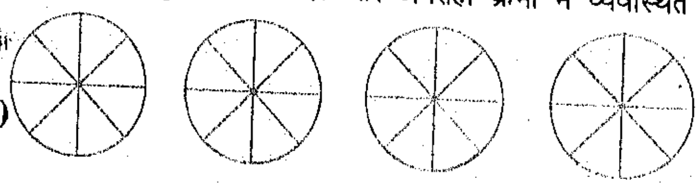
$\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ में समान हर 12 वाली तुल्य भिन्न क्रमशः $\frac{8}{12}$ आर $\frac{9}{12}$ हैं। अर्थात् $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ है और $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ है।

चूँकि, $\frac{9}{12}>\frac{8}{12}$ है, इसलिए, $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$ है।

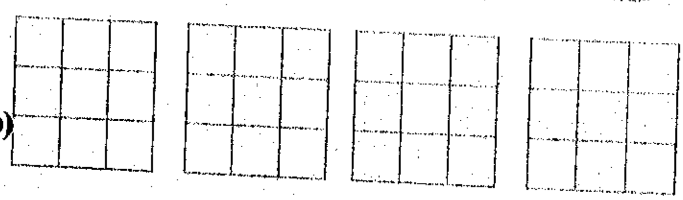
प्रश्नावली 7.4

1. प्रत्येक चित्र के लिए भिन्नों को लिखिए। भिन्नों के बीच में सही चिह्न '<', '=', '>' का प्रयोग करते हुए, इन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए:

(a)



(b)



(c) $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{6}$ और $\frac{6}{6}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

दी हुई भिन्न के बीच में उचित चिन्ह '<' या '>' भरिए :

$\frac{5}{6}\square\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}\square\frac{0}{6}$, $\frac{1}{6}\square\frac{6}{6}$, $\frac{8}{6}\square\frac{5}{6}$

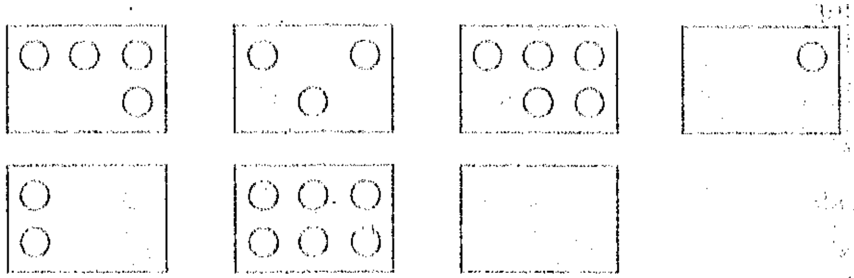
2. भिन्नों की तुलना कीजिए और उचित चिह्न लगाइए :

(a) $\frac{3}{6}\square\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{7}\square\frac{1}{4}$

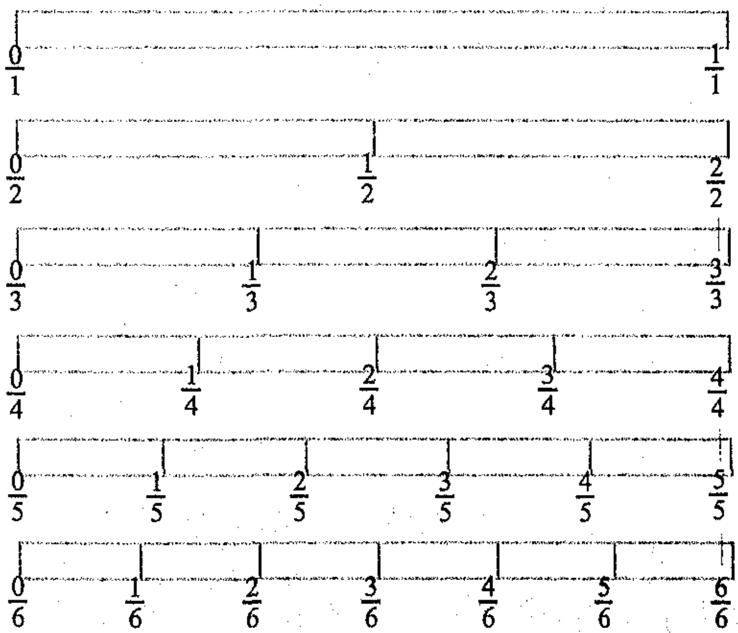
(c) $\frac{4}{5}\square\frac{0}{5}$ (d) $\frac{3}{20}\square\frac{4}{20}$

3. ऐसे ही पाँच और युग्म लीजिए और उचित चिह्न लगाइए।

4. निम्न भिन्नों को लिखिए और उन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :



5. निम्न आकृतियों को देखिए और भिन्नों के बीच में उचित चिन्ह '>' = या '<' **लिखिए** :



(a) $\frac{1}{6}\square\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4}\square\frac{2}{6}$ (c) $\frac{2}{3}\square\frac{2}{4}$

(d) $\frac{6}{6}\square\frac{3}{3}$ (e) $\frac{0}{1}\square\frac{0}{6}$ (f) $\frac{5}{6}\square\frac{5}{5}$

ऐसे ही पाँच और प्रश्न बनाइए और अपने मित्रों के साथ उन्हें हल कीजिए।

6. देखें कितनी जल्दी आप करते हैं? उचित चिह्न भरिए : (<, =, >)

(a) $\frac{1}{2}\square\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{4}\square\frac{3}{6}$ (c) $\frac{3}{5}\square\frac{2}{3}$

(d) $\frac{3}{4}\square\frac{2}{8}$ (e) $\frac{3}{5}\square\frac{6}{5}$ (f) $\frac{7}{9}\square\frac{3}{9}$

(g) $\frac{1}{4}\square\frac{2}{8}$ (h) $\frac{6}{10}\square\frac{4}{5}$ (i) $\frac{3}{4}\square\frac{7}{8}$

(j) $\frac{6}{10}\square\frac{4}{5}$ (k) $\frac{5}{7}\square\frac{15}{21}$

7. निम्नलिखित भिन्न तीन अलग-अलग संख्याएँ निरूपित करती हैं इन्हें सरलतम रूप में बदलकर उन तीन तुल्य भिन्नों के समूहों में लिखिए :

(a) $\frac{2}{12}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{8}{50}$

(d) $\frac{16}{100}$ (e) $\frac{10}{60}$ (f) $\frac{15}{75}$

(g) $\frac{12}{60}$ (h) $\frac{16}{96}$ (i) $\frac{12}{75}$

(j) $\frac{12}{72}$ (k) $\frac{3}{18}$ (l) $\frac{4}{25}$

8. निम्नलिखित के उत्तर दीजिए। लिखिए और दर्शाइए कि आपने इन्हें कैसे हल किया है?

(a) क्या $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{5}$ के बराबर है? (b) क्या $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{9}$ के बराबर है?

(c) क्या $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{20}$ के बराबर है? (d) क्या $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{30}$ के बराबर है?

9. इला 100 पृष्ठों वाली एक पुस्तक के 25 पृष्ठ पढ़ती है। ललिता इसी पुस्तक का $\frac{1}{2}$ भाग पढ़ती है। किसने कम पढ़ा?

10. रफीक ने एक घंटे के $\frac{3}{6}$ भाग तक व्यायाम किया, जबकि रोहित ने एक घंटे के $\frac{3}{4}$ भाग तक व्यायाम किया। किसने लं
बे समय तक व्यायाम किया?

11. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा A में 20 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए और 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा B में 24 विद्यार्थी प्रथम श्रेणी में पास हुए। किस कक्षा में विद्यार्थियों का अधिक भाग प्रथम श्रेणी में पास हुआ।

7.10 भिन्नों का योग और व्यवकलन (घटाना)

जब भी हमें नई संख्याएँ प्राप्त होती हैं, तो हम उन पर संक्रियाएँ करने की सोचते हैं। क्या हम इन्हें जोड़ सकते हैं? यदि हाँ, तो कैसे? क्या हम एक संख्या में से दूसरी संख्या निकाल सकते हैं? अर्थात् क्या हम एक संख्या में से दूसरी संख्या को घटा सकते हैं इत्यादि? संख्याओं के बारे में पहले पढ़े हुए गुण क्या इन नई संख्याओं पर लागू होते हैं। इनके नए गुण क्या हैं? हम यह भी देखते हैं कि ये संख्याएँ हमारे दैनिक जीवन में किस प्रकार उपयोगी हैं।

इस उदाहरण को देखिए : एक चाय की दुकान वाली अपनी दुकान पर सुबह $2\frac{1}{2}$ लीटर दूध और शाम को $1\frac{1}{2}$ लीटर दूध का प्रयोग करती है। अपनी दुकान पर वह एक दिन में कितना दूध प्रयोग करती है?

अथवा शेखर ने दोपहर के भोजन में 2 चपाती खाईं और रात्रि के भोजन में $1\frac{1}{2}$ चपाती खाई। उसने कुल कितनी चपातियाँ खाईं?

स्पष्ट है कि दोनों स्थितियों में भिन्नों को जोड़ने की आवश्यकता है। इनमें से कुछ योग मौखिक रूप से और सरलता से किये जा सकते हैं।

प्रयास कीजिए

1. मेरी माँ ने एक सेब को चार बराबर भागों में बाँटा। उन्होंने ने मुझे 2 भाग और मेरे भाई को एक भाग दिया। उन्होंने हम दोनों को कुल सेब का कितना भाग दिया?
2. माँ ने नीलू और उसके भाई से गेहूँ में से कंकड़ बीनने के लिए कहा। नीलू ने कुल कंकड़ों के $\frac{1}{4}$ कंकड़ बीने और उसके भाई ने भी कुल कंकड़ों के $\frac{1}{4}$ कंकड़ बीने। दोनों ने मिलकर कुल कंकड़ों की कितनी भिन्न बीनी?
3. सोहन एक मेज बना रहा था। उसने सोमवार तक $\frac{1}{4}$ मेज बना ली। मंगलवार को उसने $\frac{1}{4}$ मेज और बना ली और शेष बुधवार को। बुधवार को उसने मेज का कौन सा भाग बनाया?

इन सभी प्रश्नों में, आप शेष भाग भी ज्ञात कर सकते हैं? पहले प्रश्न में, सेब का बचा भाग, दूसरे प्रश्न में कुल कंकड़ों में से बीने जाने वाले कंकड़ों का भाग और तीसरे प्रश्न में बनाई जाने वाली मेज का शेष भाग।

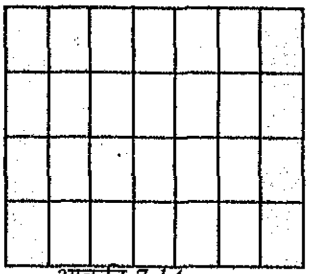
इन्हें कीजिए

अपने मित्रों के साथ ऐसे दस प्रश्न बनाइए और उन्हें हल कीजिए।

7.10.1 समान भिन्नों का जोड़ना या घटाना

सभी भिन्नों को मौखिक रूप से जोड़ा नहीं जा सकता। हमें यह जानने की आवश्यकता है कि विभिन्न स्थितियों में इन्हें कैसे जोड़ा जाता है और इस प्रक्रिया को सीखने की आवश्यकता है। हम समान भिन्नों के योग से प्रारंभ करते हैं।

एक 7 × 4 ग्रिड शीट (grid sheet) लीजिए (आकृति 7.14)। इस शीट की प्रत्येक पंक्ति में 7 खाने हैं और प्रत्येक स्तंभ में 4 खाने हैं।



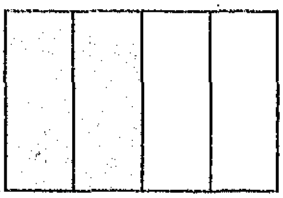
आकृति 7.14

इसमें कुल कितने खाने हैं? इनमें से 5 खानों में हरा रंग भरिए। हरा क्षेत्र एक पूर्ण की कौन सी भिन्न है? अब शीट के 4 खानों में पीला रंग भरिए। पीला क्षेत्र एक पूर्ण की कौन-सी भिन्न है? एक पूर्ण की कुल कितनी भिन्न रंग दी गई है?

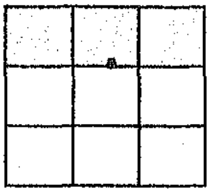
क्या इससे स्पष्ट होता है कि $\frac{5}{28}+\frac{4}{28}=\frac{9}{28}$ है?

और उदाहरणों को देखिए :

आकृति 7.15 (i) में, आकृति का दो-चौथाई भाग छायांकित है। इसका अर्थ है कि 4 में से 2 भाग, अर्थात् आकृति का $\frac{1}{2}$ भाग छायांकित है।



आकृति 7.15 (i)



आकृति 7.15 (ii)

अर्थात् $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ है।

आकृति 7.15 (ii) को देखिए।

आकृति 7.15 (ii) $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ प्रदर्शित करती है।

आपने इन उदाहरणों से क्या सीखा है? हमने सीखा है कि दो या अधिक समान भिन्नों का योग इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है :

चरण 1 अंशों को जोड़िए

चरण 2 (उभयनिष्ठ या सार्व) हर को वही रखिए।

चरण 3 परिणाम को इस रूप में लिखिए : $\dfrac{\text{चरण 1 का परिणाम}}{\text{चरण 2 का परिणाम}}$

आइए इस विधि से $\frac{3}{5}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़ें। हमें प्राप्त होता है : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$

अब बताओ $\frac{7}{12}$ और $\frac{3}{12}$ का क्या योग होगा।

प्रयास कीजिए

1. आकृतियों की सहायता से जोड़िए :

   (i) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

2. $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$ को जोड़ने पर हम क्या प्राप्त करते हैं?

   आप चित्र रूप में इसे कैसे दर्शा सकते हो? कागज़ मोड़ने की क्रिया द्वारा कैसे दर्शाया जा सकता है?

3. प्रश्न 1 और 2 जैसे दस और प्रश्न बनाइए।

   अपने मित्रों के साथ उन्हें हल कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या आप इन प्रश्नों को किसी अन्य विधि से हल करने की सोच सकते हो? लिखिए कि आप इन्हें कैसे करेंगे।

शेष ज्ञात करना :

ऊपर दिए हुए प्रश्नों में से एक प्रश्न में, हमने ज्ञात किया कि कितने सेब बाँटे गए और यह भी विचार किया कि कितने सेब शेष रह गए। एक अन्य प्रश्न में, हमने

यह भी पूछा कि कितनी मेज बननी अभी भी शेष है। शेष बचे सेब एक पूर्ण सेब में से बाँटे गए $\frac{3}{4}$ सेब घटाने के बराबर हैं। इसी प्रकार, बनने के लिए शेष बची मेज एक पूर्ण मेज में से $\frac{1}{2}$ भाग निकालने के बराबर है. ये उत्तर सरलता से प्राप्त किए जा सकते हैं।

इस उदाहरण को लीजिए :

शर्मीला के पास एक केक का $\frac{5}{6}$ भाग था। उसने केक का $\frac{2}{6}$ भाग अपने छोटे भाई को दे दिया। उसके पास कितना केक बचा?

एक आकृति से इस स्थिति को सरलता से स्पष्ट किया जा सकता है। ध्यान दीजिए कि यहाँ समान भिन्न हैं (आकृति 7.16)।



आकृति 7.16

हम प्राप्त करते हैं $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$ अर्थात्, $\frac{1}{2}$।

(क्या यह समान भिन्नों को जोड़ने जैसी विधि नहीं है?)

इस प्रकार, हम दो समान भिन्नों का अंतर निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :

चरण 1 बड़े अंश में से छोटे अंश को घटाइए।

चरण 2 (उभयनिष्ठ) हर को वही रखिए।

चरण 3 भिन्न को इस रूप में लिखिए $\frac{\text{चरण 1 का परिणाम}}{\text{चरण 2 का परिणाम}}$

क्या अब हम $\frac{3}{10}$ में से $\frac{8}{10}$ को घटा सकते हैं?

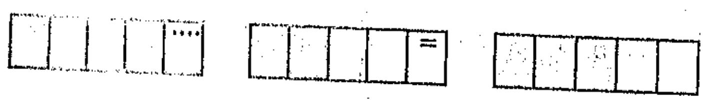
प्रयास कीजिए

1. $\frac{7}{4}$ और $\frac{3}{4}$ का अंतर ज्ञात कीजिए।
2. माँ ने एक गुड़ की पट्टी गोल आकृति में बनाई। उसने उसे 5 बराबर भागों में विभाजित किया। सीमा ने उसमें से एक टुकड़ा खा लिया। यदि मैं एक अन्य टुकड़ा खा लूँ, तो कितनी गुड़ की पट्टी शेष रहेगी?
3. मेरी बड़ी बहन ने एक तरबूज को 18 बराबर भागों में विभाजित किया। मैंने इसके 7 टुकड़े खा लिए। मेरे मित्र ने 4 टुकड़े खाए। हमने मिलकर कुल कितना तरबूज खाया? मैंने अपने मित्र से कितना अधिक तरबूज खाया? कितना तरबूज शेष रह गया?
4. इसी प्रकार के पाँच प्रश्न और बनाइए और अपने मित्रों के साथ इन्हें कीजिए।

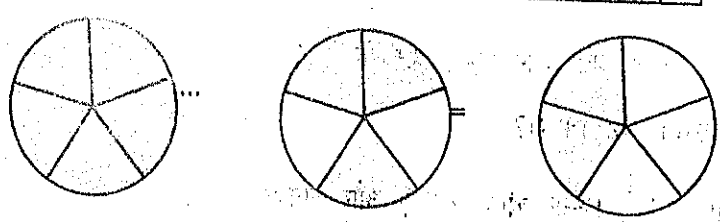
प्रश्नावली 7.5

1. निम्न भिन्नों को योग या घटाने के उचित रूप में लिखिए :

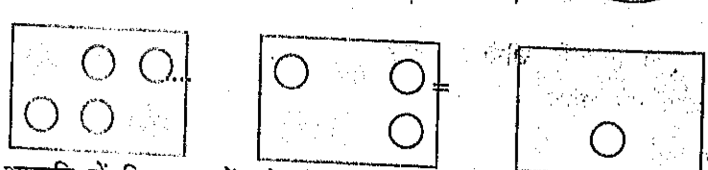
(a)



(b)

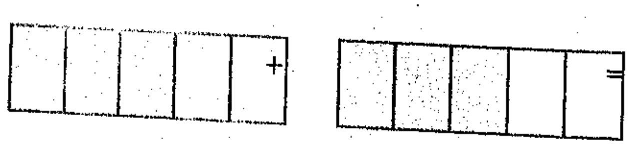


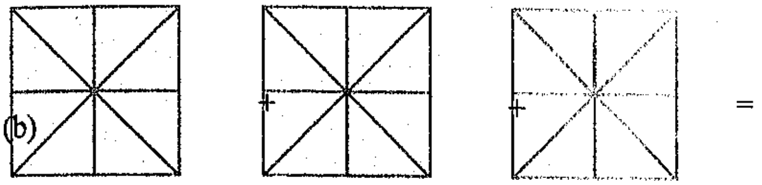
(c)



2. प्रत्येक आकृति में दिए कथनों को पूरा कीजिए :

(a)



(b) 

3. हल कीजिए :

(a) $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ (b) $\frac{8}{15}+\frac{3}{15}$ (c) $\frac{7}{7}-\frac{5}{7}$

(d) $\frac{1}{22}+\frac{21}{22}$ (e) $\frac{5}{9}+\frac{6}{9}$ (f) $\frac{12}{15}-\frac{7}{15}$

(g) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$ (h) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$ (i) $1-\frac{2}{3}$ $\left(1=\frac{3}{3}\right)$

(j) $\frac{1}{4}+\frac{0}{4}$ (k) $\frac{0}{2}+\frac{0}{2}$ (l) $\frac{16}{5}-\frac{7}{5}$

(m) $2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}$ (n) $3-\frac{12}{5}$

4. शुभम ने अपने कमरे की दीवार के $\frac{2}{3}$ भाग पर पेंट किया। उसकी बहन माधवी ने उसकी सहायता की और उस दीवार के $\frac{1}{3}$ भाग पर पेंट किया। उन दोनों ने मिलकर कुल कितना पेंट किया?

5. कमलेश ने $3\frac{1}{2}$ किग्रा चीनी खरीदी और अनवर ने $2\frac{1}{2}$ किग्रा चीनी खरीदी। दोनों ने मिलकर कुल कितनी चीनी खरीदी?

6. रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) $\frac{7}{10}-\square=\frac{3}{10}$ (b) $\square-\frac{3}{21}=\frac{5}{21}$

(c) $\square - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$ (d) $\square + \frac{5}{27} = \frac{12}{27}$

7. अध्यापिका ने पुस्तक का $\frac{3}{5}$ भाग पढ़ाया। महेश ने उस पुस्तक का $\frac{1}{5}$ भाग स्वयं पढ़ा। उसे पुस्तक का कितना भाग अभी और पढ़ना शेष है?

8. जावेद को संतरों की एक टोकरी का $\frac{5}{7}$ भाग मिला। टोकरी में संतरों का कितना भाग शेष रहा?

7.10.2 सभी भिन्नों का जोड़ना और घटाना

हम समान भिन्नों को जोड़ना और घटाना सीख चुके हैं। जिन भिन्नों के हर समान नहीं है उन्हें जोड़ना और घटाना भी कठिन नहीं है। याद कीजिए कि दो असमान भिन्नों की तुलना करने के लिए, हमने उन्हें समान हरों वाली भिन्नों में बदल दिया था। हमने ऐसा इसलिए किया था ताकि हम भिन्नों के बराबर भागों की तुलना कर सकें। जब भिन्नों को जोड़ना और घटाना हो, तो हमें यही करना पड़ता है। इसलिए पहले हमें दी हुई भिन्नों को समान हरों वाली भिन्नों में बदलना चाहिए और फिर आगे बढ़ना चाहिए।

$\frac{1}{5}$ में क्या जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है? इसका अर्थ है कि वाँछित संख्या प्राप्त करने के लिए, $\frac{1}{2}$ में से $\frac{1}{5}$ को घटाया जाए।

चूँकि $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{2}$ असमान भिन्न हैं, इसलिए घटाने के लिए पहले हम इन्हें समान हरों वाली भिन्नों में बदलते हैं। $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{5}$ की समान हर वाली तुल्य भिन्न क्रमशः $\frac{5}{10}$ और $\frac{2}{10}$ हैं।

यह इसलिए है, क्योंकि $\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$ और $\frac{1}{5}=\frac{1\times2}{5\times2}=\frac{2}{10}$ है।

अतः, $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$

उदाहरण 6 : $\frac{5}{6}$ में से $\frac{3}{4}$ को घटाइए।

हल : 6 और 4 का ल.स. 12 है। (ध्यान दीजिए यह हमने तुल्य भिन्न बनाने के लिए किया है)

अतः, $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{5\times2}{6\times2}-\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$

प्रयास कीजिए

1. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{7}$ को जोड़िए।
2. $\frac{5}{7}$ में से $\frac{2}{5}$ को घटाइए।

हम मिश्रित भिन्नों को किस प्रकार जोड़ते हैं?

मिश्रित भिन्नों के दो भाग होते हैं। इन्हें या तो एक पूर्ण संख्या और एक उचित भिन्न के जोड़ के रूप में या एक विषम भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है। इन दोनों ही स्थितियों में, उचित भिन्न या विषम भिन्न को समान हरों वाली भिन्नों में बदलकर, उन्हें जोड़ा जा सकता है।

उदाहरण 7 : $2\frac{4}{5}$ और $3\frac{5}{6}$ को जोड़िए।

हल : $2\frac{4}{5}+3\frac{5}{6}=2+\frac{4}{5}+3+\frac{5}{6}=5+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$.

यहाँ हमें भिन्न $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{6}$ को तुल्य भिन्न में बदलना होगा। आप इसके लिए अब तक सीखी हुई किसी भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

$\frac{4}{5}$ का तुल्य भिन्न $= \frac{24}{30}$ $\left(\frac{4\times6}{5\times6}\right)$

और $\frac{5}{6}$ का तुल्य भिन्न $= \frac{25}{30}$ $\left(\frac{5\times5}{6\times5}\right)$

इसलिए, योग $5+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

$= 5+\frac{24+25}{30} \quad = 5+\frac{49}{30}$

$$30\overline{)49}(1$$
$$-30$$
$$19$$

$= 5+1+\frac{19}{30} \quad = 6+\frac{19}{30}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

क्या आप इस प्रश्न को हल करने की कोई अन्य प्रक्रिया ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 8 : $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : पूर्ण संख्या 4 और 2 तथा भिन्नात्मक संख्या $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{5}$ को अलग-अलग घटाया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि $4 > 2$ है और $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$ है।

अतः, $4\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}=(4-2)+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)=2+\frac{1}{5}=2\frac{1}{5}$

उदाहरण 9 : सरल कीजिए : $8\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}$

हल : यहाँ $8>2$ है और $\frac{1}{4}<\frac{5}{6}$ है। इस प्रश्न को निम्न प्रकार हल कर सकते हैं।

$$8\frac{1}{4}=\frac{(8\times4)+1}{4}=\frac{33}{4} \text{ और } 2\frac{5}{6}=\frac{2\times6+5}{6}=\frac{17}{6}$$

अब,

$$\frac{33}{4}-\frac{17}{6}=\frac{33\times3}{12}-\frac{17\times2}{12} \quad \text{(चूँकि 4 और 6 का ल.स. 12 है)}$$

$$=\frac{99-34}{12}=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$$

प्रयास कीजिए

1. $2\frac{1}{5}$ और $3\frac{2}{6}$ को जोड़िए।
2. $5\frac{6}{7}$ में से $2\frac{2}{3}$ को घटाइए

प्रश्नावली 7.6

1. हल कीजिए :

(a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ (b) $\frac{3}{10}+\frac{7}{15}$ (c) $\frac{4}{9}+\frac{2}{7}$ (d) $\frac{5}{7}+\frac{1}{3}$

(e) $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}$ (f) $\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ (g) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ (h) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$

(i) $\frac{7}{10}-\frac{2}{5}$ (j) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ (k) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ (l) $\frac{6}{8}-\frac{1}{3}$

(m) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$ (n) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ (o) $1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}$ (p) $4\frac{2}{3}+3\frac{1}{4}$

(q) $\frac{16}{5}-\frac{7}{5}$ (r) $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$ (s) $2\frac{1}{3}-1\frac{2}{3}$ (t) $3\frac{2}{3}-1\frac{2}{3}$

2. सरिता ने $\frac{2}{5}$ मी रिबन खरीदा और ललिता ने $\frac{3}{4}$ मी रिबन खरीदा। दोनों ने कुल कितना रिबन खरीदा?

3. नैना को केक का $1\frac{1}{2}$ भाग मिला और नजमा को केक का $1\frac{1}{3}$ भाग मिला। दोनों को केक का कितना भाग मिला?

4. रिक्त स्थान भरिए : (a) $\square-\frac{5}{8}=\frac{1}{4}$ (b) $\square-\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}-\square=\frac{1}{6}$

5. योग - व्यवकलन तालिका को पूरा कीजिए :

(a) (+ →, − ↓)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b) (+ →, − ↓)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

6. $\frac{7}{8}$ मीटर तार के दो टुकड़े हो जाते हैं। इनमें से एक टुकड़ा $\frac{1}{4}$ मीटर है। दूसरे टुकड़े की लंबाई क्या है?

7. नंदिनी का घर उसके स्कूल से $\frac{9}{10}$ किमी दूर है। वह कुछ दूरी पैदल चलती है और फिर $\frac{1}{2}$ किमी की दूरी बस द्वारा तय करके स्कूल पहुँचती है। वह कितनी दूरी पैदल चलती है?

8. आशा और सेमुअल के पास एक ही माप की पुस्तक रखने वाली दो अलमारीयाँ हैं। आशा की अलमारी पुस्तकों से $\frac{5}{6}$ भाग भरी है और सेमुअल की अलमारी पुस्तकों से

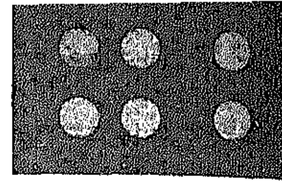
$\frac{2}{5}$ भाग भरी है। किसकी अलमारी अधिक भरी हुई है और कितनी अधिक?



9. जयदेव स्कूल के मैदान का $2\frac{1}{5}$ मिनट में चक्कर लगा लेता है। राहुल इसी कार्य को करने में $\frac{7}{4}$ मिनट का समय लेता है। इसमें कौन कम समय लेता है और कितना कम?

हमने क्या चर्चा की?

1. (a) एक भिन्न ऐसी संख्या है जो एक पूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है या संख्या रेखा पर संक्रियाओं को निरूपित करती है। पूर्ण एक अकेली वस्तु भी हो सकती है और वस्तुओं का समूह भी।
   (b) किसी स्थिति में गिने हुए भागों को भिन्न में व्यक्त करने के लिए यह आवश्यक है कि उसके सभी भाग बराबर हों।
2. भिन्न $\frac{5}{7}$ में, 5 अंश तथा 7 भिन्न का हर कहलाता है। किसी भी भिन्न के लिए हम अंश तथा हर की पहचान इस प्रकार से कर सकते हैं।
3. भिन्नों को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है। प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या रेखा पर एक निश्चित बिंदु होता है।
4. एक उचित भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है और विषम भिन्न में हर हमेशा अंश से बड़ा होता है। विषम भिन्न को एक पूर्ण और एक भाग के रूप में भी लिखा जा सकता है। इस स्थिति में यह भिन्न, मिश्रित कहलाती है।
5. दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती हैं यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती हों। प्रत्येक उचित या विषम भिन्न की अनेक तुल्य भिन्न होती हैं। एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न निकालने के लिए हम भिन्न के अंश तथा हर दोनों को समान संख्या से गुणा या भाग कर सकते हैं।
6. एक भिन्न अपने सरलतम रूप (न्यूनतम) में होगी यदि उसके अंश तथा हर में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।



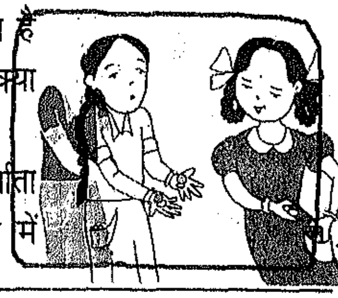
अध्याय 8

दशमलव

8.1 भूमिका

सविता और शमा स्टेशनरी का कुछ सामान खरीदने बाजार जा रही थीं। सविता ने कहा, "मेरे पास 5 रुपये 75 पैसे हैं। शमा ने कहा, "मेरे पास 7 रुपये 50 पैसे हैं।

वह दोनों रुपयों और पैसों को दशमलव-रूप में लिखना जानती थीं। इसलिए सविता ने कहा, मेरे पास 5.75 रुपये हैं और शमा ने कहा, मेरे पास 7.50 रुपये हैं। क्या उन दोनों ने सही लिखा था?



हम जानते हैं कि बिंदु एक दशमलव को दर्शाता है। इस अध्याय में, हम दशमलव के विषय में और अधिक सीखेंगे।

8.2 दशांश

रवि तथा राजू ने अपनी-अपनी पेंसिलों की लंबाई मापी। रवि की पेंसिल 7 सेमी 5 मिमी लंबी थी और राजू की 8 सेमी 3 मिमी लंबी थी। क्या आप इन लंबाइयों को सेमी के साथ दशमलव रूप में लिख सकते हो?

हम जानते हैं कि 10 मिमी $= 1$ सेमी

अतः 1 मिमी $= \frac{1}{10}$ सेमी

अब रवि के पेंसिल की लंबाई $= 7$ सेमी 5 मिमी

$= 7\frac{5}{10}$ सेमी

अर्थात् 7 सेमी और 1 सेमी का पाँच दशांश भाग

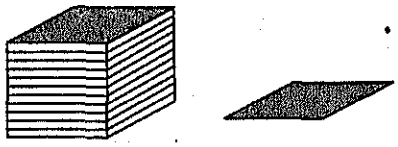
राजू के पेंसिल की लंबाई $= 8$ सेमी 3 मिमी

$= 8\frac{3}{10}$ सेमी

अर्थात् 8 सेमी और 1 सेमी का तीन दशांश भाग

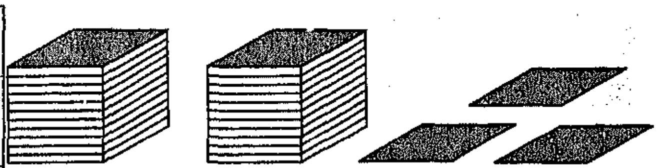
आइये, पिछले सीखे हुए को पुनः याद करें :

यदि हम इकाइयों को खंडों द्वारा दर्शायें तो एक इकाई एक खंड, दो इकाई दो खंड और इसी नियमानुसार आगे भी।



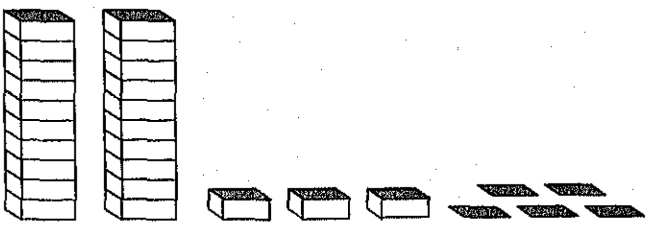
एक खंड को यदि दस बराबर भागों में बाँटें तो प्रत्येक भाग एक इकाई का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश) है, दो भाग, दो दशांश भाग को दर्शाते हैं और पाँच भाग, पाँच दशांश भाग को आगे और इसी प्रकार दो खंडों और तीन भागों (दशांश) के मेल को इस प्रकार लिखा जाएगा :

इकाई	दशांश
(1)	($\frac{1}{10}$)
2	3



इसे हम 2.3 भी लिख सकते हैं और जो दो दशलमव तीन पढ़ा जाएगा।

आइये एक अन्य उदाहरण लें जहाँ एक से अधिक इकाइयाँ हैं। प्रत्येक मीनार 10 इकाइयों को दर्शाती है। अतः यहाँ दर्शाई गई संख्या इस प्रकार हैं :



दहाई	इकाई	दशांश
(10)	(1)	($\frac{1}{10}$)
2	3	5

अतः $20 + 3 + \frac{5}{10} = 23.5$

इसे हम तेईस दशमलव पाँच पढ़ेंगे।

प्रयास कीजिए

1. क्या आप निम्न को दशमलव रूप में लिख सकते हैं?

सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
(100)	(10)	(1)	$(\frac{1}{10})$
5	3	8	1
2	7	3	4
3	5	4	6

2. रवि और राजू के पेंसिलों की लंबाइयों को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में लिखें।

3. प्रश्न 1 के समरूप तीन अन्य उदाहरण बनाएँ और उन्हें हल करें।

हमने भिन्नों को संख्या रेखा पर निरूपित किया। आइये, अब दशमलवों को भी संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखें। आइये 0.6 को संख्या रेखा पर निरूपित करें।

हम जानते हैं कि 0.6 शून्य से बड़ा है लेकिन एक से कम। इसमें 6-दशांश हैं। संख्या रेखा पर 0 और 1 के बीच की लंबाई को 10 बराबर भागों में विभाजित कीजिए और उनमें से छः भाग को कीजिए जैसा कि नीचे दिखाया गया है।



0 और 1 के बीच पाँच संख्याएँ लिखो और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाओ।

क्या अब आप 2.3 को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? जाँचिए कि 2.3 में कितनी इकाइयाँ और कितने दशांश हैं। संख्या रेखा पर यह कहाँ स्थित होगी?

1.2 को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

उदाहरण निम्न संख्याओं को स्थानीय मान सारणी में लिखिए :
(a) 20.5 (b) 4.2

हल स्थानीय मान सारणी बनाकर संख्या के प्रत्येक अंक को उचित स्थानीय मान देकर उसमें निम्न प्रकार से लिखें :

	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)
20.5	2	0	5
4.2	0	4	2

उदाहरण निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) दो इकाइयाँ और 5-दशांश

(b) तीस और 1-दशांश

हल (a) : दो इकाइयाँ और 5-दशांश

$$= 2 + \frac{5}{10} = 2.5$$

(b) तीस और 1-दशांश

$$= 30 + \frac{1}{10} = 30.1$$

उदाहरण प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$ (b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

हल (a) : $30 + 6 + \frac{2}{10}$

ज्ञात करें कि इस संख्या में कितनी दहाइयाँ, कितनी इकाइयाँ और कितने दशांश हैं।

इसमें 3 दहाइयाँ, 6 इकाइयाँ और 2 दशांश हैं।

अतः दशमलव रूप 36.2 होगा।

(b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

ध्यान से देखने पर पता चलता है कि इस संख्या में 6 सैंकड़ा, कोई दहाई अंक नहीं, 2 इकाइयाँ और 8 दशांश हैं।

अतः दशमलव रूप 602.8 होगा।

भिन्न, दशमलव रूप में

हम देख चुके हैं कि एक भिन्न जिसका हर 10 हो, को किस प्रकार दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

आइए निम्न को दशमलव रूप में लिखने का प्रयास करें (a) $\frac{22}{10}$ (b) $\frac{1}{2}$

(a) हम जानते हैं, $\frac{22}{10} = \frac{20+2}{10}$

$$= \frac{20}{10} + \frac{2}{10} = 2 + \frac{2}{10} = 2.2$$

अतः, $\frac{22}{10} = 2.2$ (दशमलव रूप में)

(b) $\frac{1}{2}$ में हर 2 है। दशमलव रूप में लिखने के लिए हर का 10 होना आवश्यक है। तुल्य भिन्न में बदलना हम पहले सीख चुके है। अतः, $\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0.5$

इस प्रकार, $\frac{1}{2}$ का दशमलव रूप 0.5 है।

प्रयास कीजिए

$\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}$ को दशमलव रूप में लिखिए

दशमलव, भिन्न रूप में

अब तक हमने सीखा है कि किस प्रकार भिन्न जिनका हर 10, 2 या 5 हो, को किस प्रकार दशमलव रूप में लिख सकते हैं।

क्या हम 1.2 को भिन्न संख्या के रूप में लिख सकते हैं।

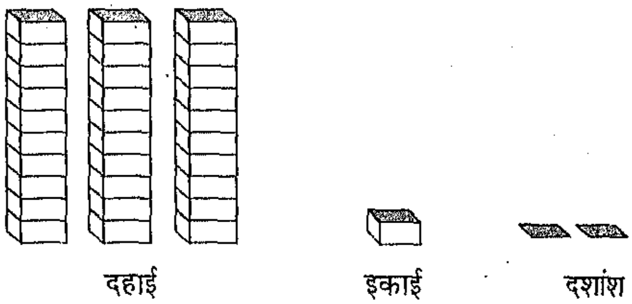
आइए देखें :

$$1.2 = 1 + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$$

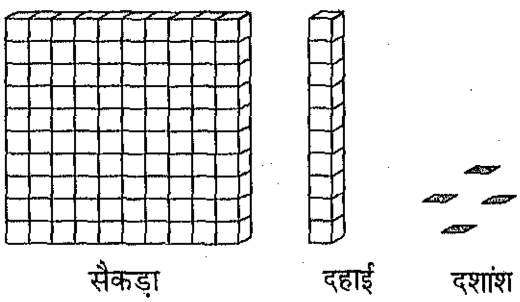
प्रश्नावली 8.1

1. निम्न के लिए दी गई सारणी में संख्याएँ लिखिए :

(a)



(b)



सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$

2. निम्न दशमलव संख्याओं को स्थानीय मान सारणी में लिखिए :

(a) 19.4 (b) 0.3 (c) 10.6 (d) 205.9

3. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) 7 दशांश

(b) 2 दहाई, 9 दशांश

(c) चौदह दशमलव छः

(d) एक सौ और 2 इकाई

(e) छः सौ दशमलव आठ

4. निम्न को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $\frac{5}{10}$ (b) $3+\frac{7}{10}$ (c) $200+60+5+\frac{1}{10}$

(d) $\frac{36}{10}$ (e) $70+\frac{8}{10}$ (f) $\frac{88}{10}$ (g) $4\frac{2}{10}$

(h) $\frac{3}{2}$ (i) $\frac{2}{5}$ (j) $\frac{12}{5}$ (k) $3\frac{3}{5}$ (l) $4\frac{1}{2}$

5. निम्न दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर न्यूनतम (सरलतम) रूप में बदलिए :

(a) 0.6 (b) 2.5 (c) 1.0 (d) 3.8

(e) 13.7 (f) 21.2 (g) 6.4

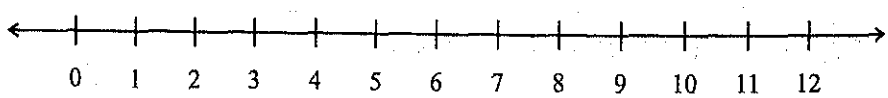
6. सेमी का प्रयोग कर निम्न को दशमलव रूप में बदलिए :

(a) 2 मिमी (b) 30 मिमी (c) 116 मिमी (d) 4 सेमी 2 मिमी

(e) 11 सेमी 52 मिमी (f) 83 मिमी.

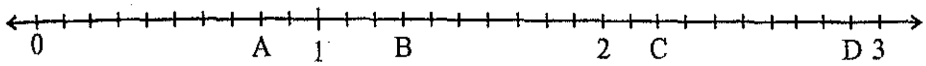
7. संख्या रेखा पर किन दो पूर्ण संख्याओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन सी पूर्ण संख्या दी हुई दशमलव संख्या के अधिक निकट है?

(a) 0.8 (b) 5.1 (c) 2.6 (d) 6.4 (e) 9.0 (f) 4.9



8. निम्न को संख्या रेखा पर दर्शाओ :
   (a) 0.2 (b) 1.9 (c) 1.1 (d) 2.5

9. दी हुई संख्या रेखा पर स्थित A, B, C, D बिंदुओं के लिए दशमलव संख्या लिखिए :

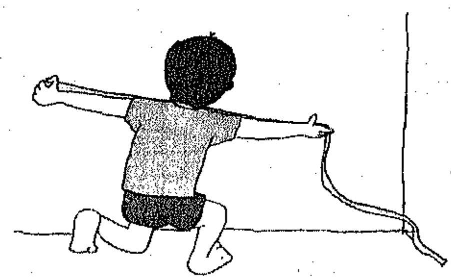


10. (a) रमेश कॉपी की लंबाई 9 सेमी 5 मिमी है। सेमी में इसकी लंबाई क्या होगी?
    (b) चने के एक छोटे पौधे की लंबाई 65 मिमी है। इसकी लंबाई सेमी में व्यक्त कीजिए?

8.3 शतांश

डेविड अपने कमरे की लंबाई माप रहा था। उसने देखा कि उसके कमरे की लंबाई 4 मी और 25 सेमी है।

वह इस लंबाई को मीटर में लिखना चाहता था। क्या आप उसकी मदद कर सकते हैं? एक सेमी एक मीटर का कौन-सा हिस्सा होगा?



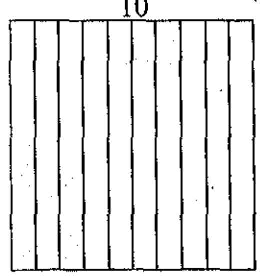
1 सेमी = $\frac{1}{100}$ मी या एक मीटर का एक शतांश भाग।

इस प्रकार 25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी $\frac{1}{100}$ का अर्थ है एक पूरे के 100 हिस्से करने पर उसमें से एक हिस्सा। जैसा हमने $\frac{1}{10}$ के लिए किया था आइए चित्र द्वारा इसे भी दिखाएँ।

एक वर्ग को दस बराबर भागों में बाँटिए।

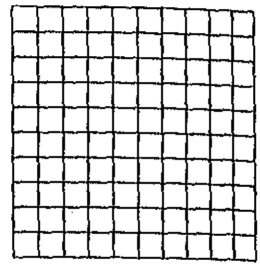
छांयांकित आयत इस वर्ग का कौन-सा भाग है?

यह $\frac{1}{10}$ या एक दशांश या 0.1 (आकृति (i) देखिए)


आकृति (i)

अब इसमें से प्रत्येक आयत को दस बराबर भागों में बाँटे।

इस प्रकार हमें 100 छोटे-छोटे वर्ग प्राप्त होते हैं (आकृति (ii) देखिए) यह प्रत्येक छोटा वर्ग बड़े वर्ग का कौन सा भाग है?



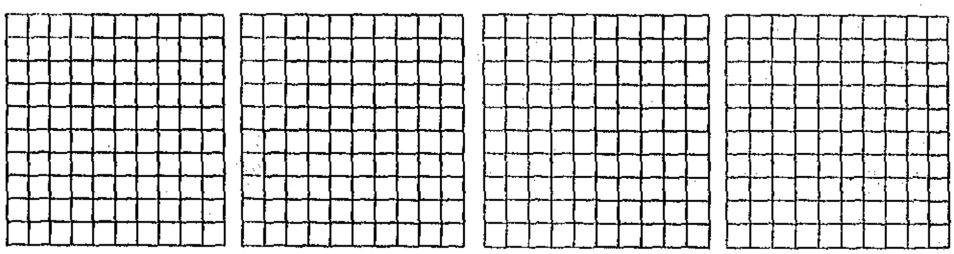
आकृति (ii)

प्रत्येक छोटा वर्ग बड़े वर्ग का $\frac{1}{100}$ या एक शतांश भाग है।

दशमलव रूप में हम $\frac{1}{100} = 0.01$ लिखेंगे और इसे "शून्य दशमलव शून्य एक" पढ़ेंगे।

यदि हम बड़े वर्ग के 8 वर्ग छायांकित करें, 15 वर्ग छायांकित करें, 50 वर्ग छायांकित करें, 92 वर्ग छायांकित करें तो वह पूरे वर्ग का कौन-सा भाग होगा?

उपरोक्त को हल करने के लिए निम्न चित्रों की सहायता लें :



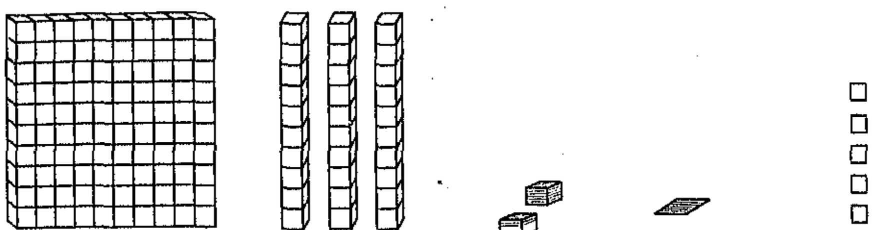
छायांकित भाग	साधारण भिन्न	दशमलव संख्या
8 वर्ग	$\frac{8}{100}$	0.08
15 वर्ग	$\frac{15}{100}$	0.15
50 वर्ग	______	______
92 वर्ग	______	______

आइए कुछ और स्थानीय मान सारणियों को देखें

इकाई (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$
2	4	3

उपरोक्त सारणी में दर्शाई गई संख्या $2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$ है। दशमलव रूप में इसे 2.43 लिखेंगे जिसे "दो दशमलव चार तीन" पढ़ेंगे।

उदाहरण 4 : खंडों में दी गई सूचना के आधार पर तालिका में दिये गये खाली स्थानों में दशमलव रूप में संख्याएँ लिखें



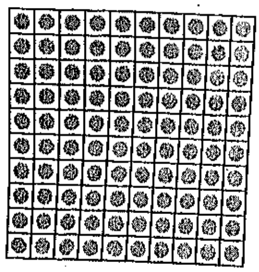
सौ का एक खंड — दस के 3 खंड — इकाई के 2 खंड — दशांश का 1 खंड — शतांश के 5 खंड

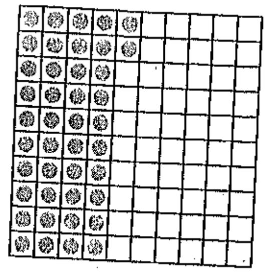
हल :

सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$
1	3	2	1	5

अतः संख्या होगी $100 + 30 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = 132.15$

उदाहरण 5 : तालिका के रिक्त स्थानों में दशमलव रूप में संख्या लिखिए :





इकाई (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$

हल :

इकाई (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$
1	4	2

अत : संख्या 1.42 है।

उदाहरण 6 : दी गई स्थानीय मान सारणी से संख्या को दशमलव रूप में लिखिए :

सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$
2	4	3	2	5

हल : संख्या होगी $2 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$

$= 200 + 40 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 243.25$

हम देख सकते हैं कि जैसे-जैसे हम बायीं से दायीं ओर जाते है, हर चरण पर गुणनखंड, पिछले गुणक का $\frac{1}{10}$ हो जाता है। पहले अंक 2 को 100 से गुणा किया, अगले अंक 4 को 10 से (100 का $\frac{1}{10}$); अगले अंक 3 को 1 से गुणा किया इसके बाद, अगला गुणनखंड $\frac{1}{10}$ है और फिर $\frac{1}{100}$ (अर्थात् $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$) है।

एक दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु हमेशा इकाई और दसवें स्थानों के बीच लगाया जाता है।

अत: अब स्वाभाविक रूप से हम स्थानीय मान सारणी को शतांश से (सौवे का $\frac{1}{10}$) हजारवें स्थान तक बढ़ा सकते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों को हल करें।

उदाहरण 7 : दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{7}{1000}$

हल : (a) हमें $\frac{4}{5}$ के तुल्य ऐसी भिन्न संख्या निकालनी है जिसका हर 10 हो।

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

(b) यहाँ, हमें $\frac{3}{4}$ के तुल्य एक ऐसी भिन्न संख्या निकालनी है जिसका हर 10 या 100 हो। परन्तु ऐसी कोई पूर्ण संख्या नहीं जिसे 4 से गुणा करने पर 10 प्राप्त हो। अत: हमें हर को 100 में ही बदलना पड़ेगा।

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

(c) $\frac{7}{1000}$, यहाँ दशांश और शतांश स्थान शून्य है

अत: हम $\frac{7}{1000} = 0.007$ लिखते हैं

उदाहरण 8 : भिन्नों को लघुतम रूप में लिखिए :

(a) 0.04 (b) 2.34 (c) 0.342

हल : (a) $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

(b) $2.34 = 2 + \frac{34}{100} = 2 + \frac{34 \div 2}{100 \div 2} = 2 + \frac{17}{50} = 2\frac{17}{50}$

(c) $0.342 = \frac{342}{1000} = \frac{342 \div 2}{1000 \div 2} = \frac{171}{500}$

उदाहरण 9 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ (b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

हल : (a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$

$= 235 + 2 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{100}$

$= 235.29$

(b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

$= 50 + 1 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100}$

$= 50.16$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

$= 16 + 3 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}$

$= 16.305$

उदाहरण 10 : निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) तीन सौ छः और सात शतांश

(b) ग्यारह दशमलव दो तीन पाँच

(c) नौ और पच्चीस हज़ारवें

हल : (a) तीन सौ छः और सात शतांश

$= 306 + \frac{7}{100}$

$= 306 + 0 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100} = 306.07$

(b) ग्यारह दशमलव दो तीन पांच $= 11.235$

(c) नौ और पच्चीस हज़ारवें

$= 9 + \frac{25}{1000}$

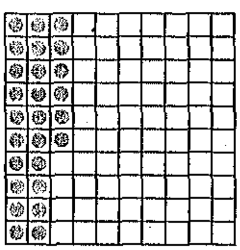
(पच्चीस हज़ारवें $= \frac{25}{1000} = \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$)

अत : संख्या $= 9 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 9.025$

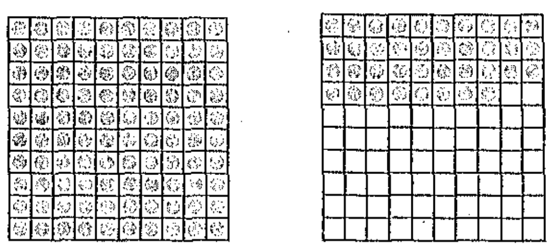
प्रश्नावली 8.2

1. इन बक्सों की सहायता से सारणी को पूरा कर दशमलव रूप में लिखिए :

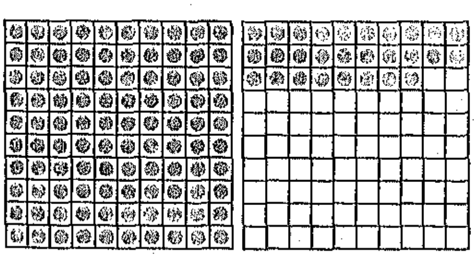
(a)



(b)



(c)



	इकाई	दहाई	शतांश	अंक
(a)				
(b)				
(c)				

2. स्थानीय मान सारणी को देखकर दशमलव रूप में लिखिए :

	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हज़ारवाँ
	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
(i)	0	0	3	2	5	0
(ii)	1	0	2	6	3	0
(iii)	0	3	0	0	2	5
(iv)	2	1	1	9	0	2
(v)	0	1	2	2	4	1

3. निम्न दशमलवों को स्थानीय मान सारणी बनाकर लिखिए :

(a) 0.29 (b) 2.08 (c) 19.60 (d) 148.32 (e) 200.812

4. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $20+9+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}$ (b) $30+\frac{4}{10}+\frac{8}{100}+\frac{3}{1000}$

(c) $137+\frac{5}{100}$ (d) $\frac{7}{10}+\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}$

(e) $23+\frac{2}{10}+\frac{6}{1000}$ (f) $700+20+5+\frac{9}{100}$

5. निम्न दशमलवों को शब्दों में लिखिए :

(a) 0.03 (b) 1.20 (c) 17.38 (d) 108.56 (e) 10.07
(f) 210.109 (g) 0.032 (h) 5.008

6. संख्या रेखा के किन दो बिंदुओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित हैं?

(a) 0.06 (b) 0.45 (c) 0.19 (d) 0.66 (e) 0.92
(f) 0.57 (g) 0.03 (h) 0.20

7. न्यूनतम रूप में भिन्न बनाकर लिखिए :

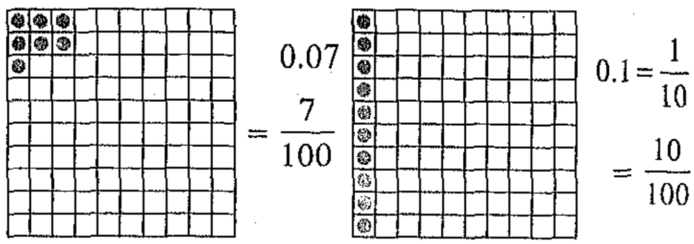
(a) 0.60 (b) 0.05 (c) 0.75 (d) 0.18 (e) 0.25
(f) 0.82 (g) 0.004 (h) 0.125 (i) 0.066

8.4 दशमलवों की तुलना

क्या आप बता सकते हैं कि कौन सी संख्या बड़ी है, 0.07 या 0.1?

दो समान आकार के वर्गाकार कागज़ लीजिए। उन्हें 100 बराबर भागों में बाँटिए। $0.07 = \frac{7}{100}$ दर्शाने के लिए हमें 100 में से 7 भाग छायांकित करने होंगे।

अब $0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, अतः 0.1 को दर्शाने के लिए 100 में से 10 भाग छायांकित करने होंगे।



इस प्रकार $0.1 > 0.07$

आइए अब 32.55 और 32.5. की तुलना करें। इस स्थिति में हम पहले पूर्ण भाग की तुलना करते हैं हम यह देखते हैं कि दोनों संख्याओं का पूर्ण भाग 32 है अर्थात् समान हैं। यद्यपि हम जानते हैं कि ये दो संख्याएँ समान नहीं हैं। इसलिए अब हम इनके दशांश भागों की तुलना करते हैं। हम पाते हैं कि 32.55 और 32.5 के दशांश भाग भी समान हैं। अब हम इनके शतांश भाग की तुलना करते हैं, हम पाते हैं,

$$32.55 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} \quad \text{और } 32.5 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100}$$

इसलिए, $32.55 > 32.5$, क्योंकि 32.55 के शतांश स्थान का अंक 32.5 के शतांश स्थान के अंक से बड़ा है।

प्रयास कीजिए

तुलना कीजिए :

(i) 1.82 और 1.823 (ii) 5.7 और 4.9

(iii) 6.05 और 6.50 (iv) 3.15 और 3.18

उदाहरण 11 : कौन सी संख्या बड़ी है?

(a) 0.7 or 0.78 (b) 1 or 0.99 (c) 1.09 or 1.093

हल : (i) $0.7 = \frac{7}{10} + \frac{0}{100}$, $0.78 = \frac{7}{10} + \frac{8}{100}$

0.78 के शतांश स्थान का अंक 0.7 के अंक से बड़ा है।

अतः $0.78 > 0.7$

(ii) $1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100}$, $0.99 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$

संख्या 1 का पूर्ण भाग 1, 0.99. के पूर्ण भाग 0 से बड़ा है।

अतः $1 > 0.99$

(iii) $1.09 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$1.093 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$

दोनों संख्याओं के शतांश स्थान तक के सभी अंक समान हैं परंतु 1.093 के हज़ारवें स्थान का अंक 1.09 के अंक से बड़ा है।

अतः $1.093 > 1.09$

प्रश्नावली 8.3

1. कौन सी बड़ी है? कारण भी लिखिए :

(a) 0.3 या 0.4 (b) 0.07 या 0.02 (c) 3 या 0.8

(d) 0.5 या 0.05 (e) 0.052 या 0.11 (f) 2.012 या 0.99

(g) 1 या 0.89 (h) 1.23 या 1.2 (i) 0.099 या 0.19

(j) 1.5 या 1.50 (k) 1.431 या 1.490 (l) 3.3 या 3.300

(m) 5.64 या 5.603 (n) 1.008 या 1.800 (o) 1.52 या 2.05

(p) पाँच ऐसे ही उदाहरण लिखकर उनमें से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।

8.5 दशमलव का प्रयोग

8.5.1 धन

हम जानते हैं कि 100 पैसे = 1 रुपया

अत: 1 पैसा $= \frac{1}{100}$ रुपया = 0.01 रुपया

इस प्रकार, 65 पैसे $= \frac{65}{100}$ रुपया = 0.65 रुपया

और 5 पैसे $= \frac{5}{100}$ रुपया = 0.05 रुपया

105 पैसे कितने होंगे?

यह 1 रुपया 5 पैसा होगा = 1.05 रुपये

प्रयास कीजिए

(i) 2 रुपये 5 पैसे और 2 रुपये 50 पैसों को दशमलव में लिखिए।

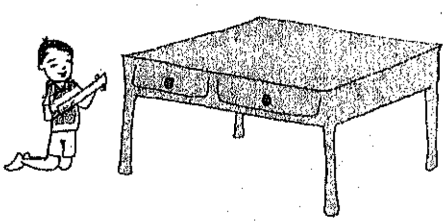
(ii) 20 रुपये 7 पैसे और 21 रुपये 75 पैसों को दशमलव में लिखिए।

8.5.2 लंबाई

महेश अपनी मेज की ऊपरी सतह को मीटर में मापना चाहता है। उसके पास 50 सेमी वाला फीता है। उसने पाया कि मेज की ऊपरी सतह की लंबाई 156 सेमी थी। इसकी लंबाई मीटर में कितनी होगी?

1 सेमी $= \frac{1}{100}$ मी या 0.01 मी

अत: 56 सेमी $= \frac{56}{100}$ मी = 0.56 मी

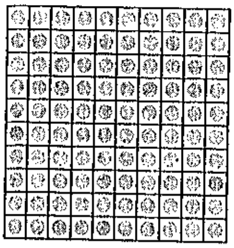


इस प्रकार मेज की ऊपरी सतह की लंबाई

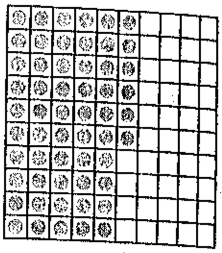
156 सेमी = 100 सेमी + 56 सेमी

= 1 सेमी + $\frac{56}{100}$ मी = 1.56 मी

महेश इस लंबाई को चित्र द्वारा दर्शाना चाहता है। उसने समान आकार के वर्गाकार कागज़ों को 100 बराबर भागों में बराबर भागों में बाँटा और प्रत्येक छोटे वर्ग को एक सेमी माना।



100 सेमी



56 सेमी

प्रयास कीजिए

1. क्या 4 मिमी को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में लिख सकते हैं?
2. 7 सेमी 5 मिमी को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में कैसे लिखेंगे?
   क्या अब 52 मी को दशमलव का प्रयोग करके किमी में लिख सकते हैं? दशमलव का प्रयोग कर 340 मी को किमी में कैसे लिखेंगे? 2008 मी को किमी में कैसे लिखेंगे?

8.5.3 वज़न

नन्दू ने 500 ग्राम आलू, 250 ग्राम. शिमला मिर्च, 700 ग्राम प्याज, 500 ग्राम टमाटर, 100 ग्राम अदरक और 300 ग्राम मूली खरीदी। सब्जियों का कुल वज़न कितना है? आइए सभी सब्ज़ियों के वज़न को जोड़ें :

500 ग्रा + 250 ग्रा + 700 ग्रा + 500 ग्रा + 100 ग्रा + 300 ग्रा = 2350 ग्रा

हम जानते हैं कि 1000 ग्रा = 1 किग्रा

अतः 1 ग्रा = $\frac{1}{1000}$ किग्रा = 0.001 किग्रा

इस प्रकार 2350 ग्रा = 2000 ग्रा + 350 ग्रा = $\frac{2000}{1000}$ किग्रा + $\frac{350}{1000}$ किग्रा

= 2 किग्रा + 0.350 किग्रा (क्योंकि $\frac{1}{1000}$ किग्रा = 0.001 किग्रा)

= 2.350 किग्रा

अर्थात् 2350 ग्रा = 2 किग्रा 350 ग्रा = 2.350 ग्रा

अतः थैले में कुल 2.350 किग्रा सब्जी थी।

प्रयास कीजिए

1. क्या आप 456 ग्रा को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिख सकते हैं?
2. किग्रा 9 ग्रा को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में कैसे लिख सकते हैं?

प्रश्नावली 8.4

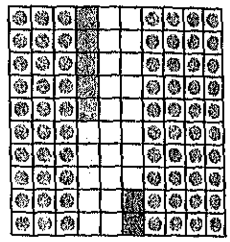
1. दशमलव का प्रयोग कर रुपयों में बदलिए :
   (a) 5 पैसे (b) 75 पैसे (c) 3 रुपये 60 पैसे
   (d) 450 पैसे (e) 20 पैसे (f) 50 रुपये 90 पैसे
   (g) 725 पैसे
2. दशमलव का प्रयोग कर मीटर में व्यक्त करिए :
   (a) 15 सेमी (b) 6 सेमी (c) 136 सेमी
   (d) 2 मी 45 सेमी (e) 9 मी 7 सेमी (f) 419 सेमी
3. दशमलव का प्रयोग कर सेमी में करिए :
   (a) 5 मिमी (b) 60 मिमी (c) 164 मिमी
   (d) 9 सेमी 8 मिमी (e) 16 सेमी 7 मिमी (f) 93 मिमी
4. दशमलव का प्रयोग कर किमी में लिखिए :
   (a) 8 मी (b) 88 मी (c) 888 मी
   (d) 8888 मी (e) 70 किमी 5 मी (f) 29 किमी 37 मी
5. दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए :
   (a) 2 ग्रा (b) 100 ग्रा (c) 3750 ग्रा
   (d) 2 किग्रा 700 ग्रा (e) 5 किग्रा 8 ग्रा (f) 26 किग्रा 50 ग्रा
6. निम्न में से दशमलव हटा कर लिखिए :
   (a) 2.30 रुपये (b) 9.240 किग्रा (c) 3.5 सेमी
   (d) 3.05 किमी (e) 8.81 मी (f) 13.05 रुपये
   (g) 15.038 किमी (h) 14.007 किग्रा (i) 11.06 मी
   (j) 0.2 सेमी

8.6 दशमलव संख्याओं का जोड़

इन्हें कीजिए

0.35 और 0.42 को जोड़िए।

एक वर्ग लेकर उसे 100 समान भागों में बांटिए।



इस वर्ग में 0.35 को दर्शाने के लिए 3 दशांश को छायांकित करें और 5 शतांश में रंग भरें।

इसी वर्ग में 0.42 को दिखाने के लिए 4 दशांश को छायांकित करें और 2 शतांश मे रंग भरें।

अब वर्ग में कुल दसवों और कुल सौवों की संख्या निकाल लें।

	इकाई	दशांश	शतांश
	0	3	5
+	0	4	2
	0	7	7

अत: 0.35 + 0.42 = 0.77

इस प्रकार, जैसे हम पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं ऐसे ही दशमलव संख्याओं को भी जोड़ सकते हैं।

क्या अब आप 0.18 और 0.54 को जोड़ सकते हैं?

	इकाई	दशांश	शतांश
	0	1	8
+	0	5	4
	0	7	2

अत: 0.18 + 0.54 = 0.72

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए

(i) 0.29 + 0.36 (ii) 0.7 + 0.08

(iii) 1.54 + 1.80 (iv) 2.66 + 1.85

उदाहरण 12 : लता ने 9.50 रुपये का एक पैन खरीदा और 2.50 रुपये की एक पेंसिल खरीदी। उसने कुल कितने रुपये खर्च किये?

हल : पैन पर खर्च किया गया धन = 9.50 रुपये

पेंसिल पर खर्च किया गया धन = 2.50 रुपये

कुल खर्च किया = 9.50 रुपये

+ 2.50 रुपये

= 12.00 रुपये



उदाहरण 13 : सैमसन ने 5 किमी 52 मी की दूरी बस से, 2 किमी 265 मी कार से और शेष 1 किमी 30 मी पैदल चल कर तय की। उसने कुल कितनी दूरी तय की?

हल : बस द्वारा तय की गई दूरी = 5 किमी 52 मी = 5.052 किमी

कार द्वारा तय की गई दूरी = 2 किमी 265 मी = 2.265 किमी

पैदल तय की गई दूरी = 1 किमी 30 मी = 1.030 किमी

इस प्रकार, तय की गई कुल दूरी है

5.052 किमी

2.265 किमी

\+ 1.030 किमी

8.347 किमी

अतः तय की गई कुल दूरी = 8.347 किमी

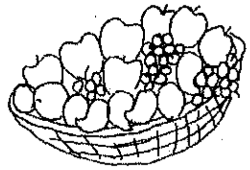
उदाहरण 14 : राहुल ने 4 किग्रा 9 ग्रा सेब, 2 किग्रा 60 ग्राम अंगूर और 5 किग्रा 300 ग्राम आम खरीदे। खरीदे गए सभी फलों का कुल वज़न कितना था?

हल : सेबों का वज़न = 4 किग्रा 90 ग्रा = 4.090 किग्रा

अंगूरों का वज़न = 2 ग्रा 60 ग्रा = 2.060 किग्रा

आमों का वज़न = 5 किग्रा 300 ग्रा = 5.300 किग्रा

अत: खरीदे गए फलों का कुल वज़न



$$\begin{array}{r} 4.090 \text{ किग्रा} \\ 2.060 \text{ किग्रा} \\ + \quad 5.300 \text{ किग्रा} \\ \hline 11.450 \text{ किग्रा} \\ \hline \end{array}$$

खरीदे गए फलों का कुल वज़न = 11.450 किग्रा

प्रश्नावली 8.5

1. निम्न में से प्रत्येक का जोड़ ज्ञात करें :
   (i) 0.007 + 8.5 + 30.08 (ii) 15 + 0.632 + 13.8
   (iii) 27.076 + 0.55 + 0.004 (iv) 25.65 + 9.005 + 3.7
   (v) 0.75 + 10.425 + 2 (vi) 280.69 + 25.2 + 38
2. रशीद ने 35.75 रुपये में गणित की और 32.60 रुपये में विज्ञान की पुस्तक खरीदीं। रशीद द्वारा खर्च किया गया कुल धन ज्ञात कीजिए।
3. राधिका की माँ ने उसे 10.50 रुपये दिये और पिता ने 15.80 रुपये दिये। उसके माता-पिता द्वारा दिया गया कुल धन ज्ञात कीजिए।
4. नसरीन ने अपनी कमीज़ के लिए 3 मी 20 सेमी कपड़ा खरीदा और 2 मी 5 सेमी पैंट के लिए खरीदा। उसके द्वारा खरीदे गए कपड़े की कुल लंबाई निकालिए।
5. विल्सन ने 2 मी 50 सेमी कपड़ा अपने कुर्ते के लिए और 1 मी 25 सेमी अपने पाज़ामे के लिए खरीदा। उसके द्वारा खरीदे गए कपड़े की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।



8.7 दशमलव संख्याओं का घटाना

इन्हें कीजिए

2.58 में से 1.32 घटाइए

इसे हम एक सारणी द्वारा दिखा सकते हैं :

	इकाई	दशांश	शतांश
	2	5	8
–	1	3	2
	1	2	6

अत: 2.58 – 1.32 = 1.26

इस प्रकार दशमलव संख्याओं को घटाया जा सकता है यदि शतांश में से शतांश स्थान का अंक, दशांश में से दशांश स्थान का अंक और इकाई में से इकाई अंक और आगे इसी प्रकार घटाएँ, जैसे हमने जोड़ में किया।

कभी-कभी, दशमलवों को घटाने के लिए हमें संख्या के अंकों के समूह फिर से बनाने होते हैं जैसा, जोड़ में किया गया।

आइये 3.5 में से 1.74 घटाएँ

	इकाई	दशांश	शतांश
	3	5	0
–	1	7	4

संख्या में सौवें स्थान के अंकों को घटाने पर जो कि यहाँ संभव नहीं है। अत: फिर से समूह बनाने पर हमें प्राप्त होगा।

$$\begin{array}{rcccc} & \overset{2}{\cancel{3}} & . & \overset{14}{\cancel{5}} & \overset{10}{\cancel{0}} \\ - & 1 & . & 7 & 4 \\ \hline & 1 & . & 7 & 6 \\ \hline \end{array}$$



अत: 3.5 – 1.74 = 1.76

प्रयास कीजिए

5.46 में से 1.85 घटाएं;　　8.28 में से 5.25 घटाएं;

2.29 में से 0.95 घटाएं;　　5.68 में से 2.25 घटाएं।

उदाहरण 15 : अभिषेक के पास 7.45 रुपये हैं। वह 5.30 रुपये की टॉफी खरीदता है। अभिषेक के पास अब कितने रुपये शेष बचते हैं?

हल : कुल धन = 7.45 रुपये

टॉफी पर किया गया खर्च = 5.30 रुपये

बाकि शेष धन = 7.45 रुपये – 5.30 रुपये

= 2.15 रुपये

उदाहरण 16 : वहीदा का घर उसके स्कूल से 5 किमी 350 मी की दूरी पर है। वह 1 किमी 70 मी पैदल चलती है और शेष दूरी बस से तय करती है। बस द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए?

हल : स्कूल से घर की कुल दूरी = 5.350 किमी

पैदल तय की गई दूरी = 1.070 किमी

अतः बस द्वारा तय की गई दूरी = 5.350 किमी – 1.070 किमी

= 4.280 किमी

इस प्रकार बस द्वारा तय की दूरी = 4.280 किमी

= 4 किमी 280 मी

उदाहरण 17 : रूबी 5 किग्रा 200 ग्रा वज़न का एक तरबूज़ खरीदती है। इसमें से 2 किग्रा 750 ग्रा उसने अपने पड़ौसी को दे दिया। रूबी के पास कितना तरबूज़ बचा?

हल : तरबूज़ का कुल वज़न = 5.200 किग्रा

पड़ौसी को दिए गए तरबूज़ का वज़न = 2.750 किग्रा

अतः बचे हुए तरबूज़ का वज़न = 5.200 किग्रा – 2.750 किग्रा

= 2.450 किग्रा

प्रश्नावली 8.6

1. निम्न को घटाओ :
   (a) 20.75 रुपये में से 18.25 रुपये (b) 250 मी में से 202.54 मी
   (c) 8.4 रुपये में से 5.40 रुपये (d) 5.206 किमी में से 2.051 किमी
   (e) 2.107 किग्रा में से 0.314 रुपये

2. मान ज्ञात कीजिए :
   (a) 9.756 – 6.28 (b) 21.05 – 15.27
   (c) 18.5 – 6.79 (d) 11.6 – 9.847

3. राजू एक पुस्तक 35.65 रुपये की खरीदता है। उसने दुकानदार को 50 रुपये दिये। दुकानदार ने उसे कितने रुपये वापिस दिए?

4. रानी के पास 18.50 रुपये हैं। उसने 11.75 रुपये की एक आइसक्रीम खरीदी। अब उसके पास कितने रुपये बचे?

5. टीना के पास 20 मी 5 सेमी लंबा कपड़ा है। उसमें से उसने एक पर्दा बनाने के लिये 4 मी 50 सेमी कपड़ा काट लिया। टीना के पास अब कितना लंबा कपड़ा बचा?

6. नमिता प्रतिदिन 20 किमी 50 मी की दूरी तय करती है। इसमें से 10 किमी 200 मी दूरी वह बस द्वारा तय करती है और शेष ऑटो-रिक्शा द्वारा। नमिता ऑटो-रिक्शा द्वारा कितनी दूरी तय करती है?

7. आकाश 10 किग्रा सब्जी खरीदता है जिसमें से 3 किग्रा 500 ग्रा प्याज, 2 किग्रा 75 ग्रा टमाटर और शेष आलू हैं। आलू का वज़न ज्ञात कीजिए?

8. नरेश सुबह के समय 2 किमी 35 मी चलता है। और 1 किमी 7 मी शाम के समय चलता है। वह कुल कितना चलता है?

9. सुनीता 15 किमी 268 मी बस द्वारा, 7 किमी 7 मी कार द्वारा और 500 मी पैदल चल कर स्कूल पहुँचती है। उसके घर से स्कूल की दूरी ज्ञात कीजिए।

10. रवि ने 5 किग्रा 400 ग्रा चावल, 2 किग्रा 20 ग्रा चीनी और 10 किग्रा 850 ग्रा आटा खरीदा। उसने कुल कितना सामान खरीदा?

1. एक पूरी इकाई के भागों को जानने के लिए हम एक इकाई को खंड से दर्शाएंगे। एक खंड के 10 बराबर भाग करने पर प्रत्येक भाग उस इकाई का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश) होगा। इसे हम 0.1 के रूप में लिख सकते हैं जो कि दशमलव निरूपण है। इस बिंदू को हम दशमलव कहते हैं जो कि इकाई और दशांश स्थान के अंकों के बीच लगाया जाता है।
2. प्रत्येक भिन्न जिसका हर 10 हो, को दशमलव रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक दशमलव संख्या को भी भिन्न रूप में लिखा जा सकता है।
3. एक खंड को 100 समान भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग उस इकाई का $\frac{1}{100}$ (एक शतांश) भाग है। दशमलव रूप में इसे हम 0.01 लिख सकते हैं।
4. प्रत्येक भिन्न जिसका हर 100 हो, को दशमलव रूप में लिखा जा सकता है और उसके विपरीत प्रत्येक दशमलव संख्या को भी भिन्न रूप में लिखा जा सकता है।
5. स्थानीय मान सारणी में जैसे-जैसे हम बाएं से दाएं की ओर जाते हैं गुणनखंड पिछले गुणक का $\frac{1}{10}$ हो जाता है।

   स्थानीय मान सारणी को हम आगे भी बढ़ा सकते हैं, शतांश स्थान से (शतांश का $\frac{1}{10}$) हज़ारवें $\frac{1}{1000}$ स्थान तक जिसे हम दशमलव रूप में 0.001 भी लिखते हैं।
6. दशमलव संख्याओं को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है।
7. प्रत्येक दशमलव को भिन्न रूप में लिखा जा सकता है।
8. दो दशमलव संख्याओं की आपस में तुलना की जा सकती है। तुलना संख्या के पूर्ण भाग से (जो कि दशमलव बिंदू की बाईं ओर के अंक होते हैं से) शुरू की जाती है। यदि पूर्ण भाग समान हैं तो दशांश स्थान के अंकों की तुलना की जाती है और यदि ये भी समान हों तो अगले अंक को देखें यह क्रम आगे बढ़ता रहता है।
9. दशमलवों का प्रयोग धन, लंबाई और भार (वज़न) की इकाइयों को दर्शाने के लिए किया जाता है।

अध्याय 9

आँकड़ों का प्रबंधन

भूमिका

आपने अपनी कक्षा में अपने शिक्षक को रजिस्टर पर प्रतिदिन विद्यार्थियों की उपस्थिति अंकित करते या प्रत्येक टेस्ट अथवा परीक्षा के बाद आपके द्वारा प्राप्त अंकों को अंकित करते हुए अवश्य ही देखा होगा। इसी प्रकार, आपने क्रिकेट के एक स्कोर बोर्ड को भी अवश्य देखा होगा। ऐसे दो स्कोर बोर्ड नीचे दर्शाए जा रहे हैं :

गेंदबाज का नाम	ओवर	मेडन ओवर	दिए गए रन	लिए गए विकेट
A	10	2	40	3
B	10	1	30	2
C	10	2	20	1
D	10	1	50	4

बल्लेबाज का नाम	रन	खेली गई गेंदें	समय (मिनटों में)
E	45	62	75
F	55	70	81
G	37	53	67
H	22	41	55

आप जानते हैं कि खेल में कौन जीता या कौन हारा केवल यही सूचना अंकित नहीं की जाती है। स्कोर बोर्ड में आप खेल के बारे में कुछ और अति उपयोगी सूचनाएँ भी प्राप्त कर लेते हैं, जो उतनी ही महत्त्वपूर्ण होती हैं।

उदाहरणार्थ, आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि सबसे अधिक रन बनाने वाले खिलाड़ी ने कितना समय लिया और कितनी गेंदो का सामना किया।

इसी प्रकार, अपने दैनिक जीवन में, आपने संख्याओं, आकृतियों, नामों इत्यादि से संबंधित अनेक प्रकार की सारणियाँ (Tables) देखी होंगी।

ये सारणियाँ हमें 'आँकड़े' (Data) उपलब्ध कराती हैं। **आँकड़े संख्याओं के वे संग्रह हैं जो कुछ सूचनाएँ देने के लिए एकत्रित किए जाते हैं।**

9.2 आँकड़ों का अभिलेखन

आइए एक उदाहरण लें जिसमें किसी कक्षा के विद्यार्थी एक सैर (Picnic) पर जाने की तैयारी कर रहे हैं। शिक्षक ने विद्यार्थियों से चार फलों केला, सेब, संतरा या अमरूद में से एक फल चुनने को कहा। इसकी सूची बनाने का कार्य उमा को सौंपा गया। उसने सभी बच्चों की एक सूची बनाई और प्रत्येक नाम के सम्मुख उसके द्वारा चुना हुआ फल लिख दिया। यह सूची बच्चों की पंसद के अनुसार उन्हें फल देने में शिक्षक की सहायता करेगी।

राघव	-	केला	भावना	-	सेब
प्रीति	-	सेब	मनोज	-	केला
अमर	-	अमरूद	डोनाल्ड	-	सेब
फातिमा	-	संतरा	मारिया	-	केला
अमिता	-	सेब	उमा	-	संतरा
रमन	-	केला	अख्तर	-	अमरूद
राधा	-	संतरा	रितु	-	सेब
फरीदा	-	अमरूद	सलमा	-	केला
अनुराधा	-	केला	कविता	-	अमरूद
रति	-	केला	जावेद	-	केला



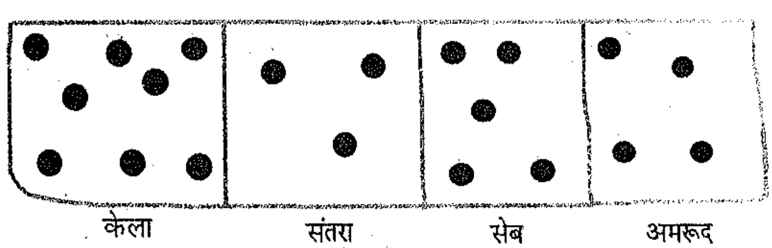
यदि शिक्षक यह जानना चाहे कि कक्षा के लिए कितने केलों की आवश्यकता होगी, तो उसे सूची में दिए सभी नामों को एक-एक करके पढ़ कर केलों की संख्या की गिनती करनी पड़ेगी और इससे ज्ञात होगा कि कुल कितने केलों की आवश्यकता है। सेबों, अमरूदों और संतरों की अलग-अलग संख्याएँ ज्ञात करने के लिए भी उसे प्रत्येक फल के लिए, इसी प्रक्रिया को दोहराना होगा। यह प्रक्रिया कितनी जटिल और समय लेने वाली है। यह प्रक्रिया और भी अधिक जटिल हो सकती है, यदि सूची में विद्यार्थियों की संख्या 50 हो जाए।

इसलिए, उमा एक-एक करके केवल इन फलों के नाम ऐसे लिखती है :

केला, सेब, अमरूद, संतरा, सेब, केला, संतरा, अमरूद, केला, केला, सेब, केला, संतरा, अमरूद, सेब, केला, अमरूद, केला।

क्या आप सोचते हैं कि इससे शिक्षक का कार्य सरल हो जाता है? उसे अब भी पहले की तरह फलों को एक-एक करके गिनना पड़ेगा।

सलमा के मस्तिष्क में एक नया विचार आता है। वह फर्श पर चार वर्ग बना देती है। प्रत्येक वर्ग को केवल एक प्रकार के फल के लिए ही रखा जाता है। वह बच्चों से कहती है कि वह अपने पंसद के फल वाले वर्ग में एक कंकड़ रख दें। अर्थात् वह विद्यार्थी जिसने केला चुना है केले से अंकित वर्ग में एक कंकड़ रख देगा, इत्यादि।



प्रत्येक वर्ग के कंकड़ गिन कर, सलमा तुरंत यह बता सकती है कि प्रत्येक प्रकार के कितने फलों की आवश्यकता है। वह वाँछित सूचना विभिन्न वर्गों में एक क्रमबद्ध तरीके से कंकड़ रख कर तुरंत प्राप्त कर सकती है।

इस क्रियाकलाप को 40 विद्यार्थियों के लिए किन्हीं भी चार फलों के साथ करने का प्रयत्न कीजिए। आप कंकड़ों के स्थान पर बोतलों के ढक्कन या किसी अन्य टोकन (Token) का भी प्रयोग कर सकते हैं।

9.3 आँकड़ों का संग्रह

सलमा ने जो सूचनाएँ प्राप्त कीं, वही सूचना रोनाल्ड एक पेन और कागज़ लेकर ज्ञात कर सकता है। उसे कंकड़ों की आवश्यकता नहीं है। वह बच्चों से यह भी नहीं कहता कि आओ और वर्ग में कंकड़ रखो। वह निम्न सारणी तैयार करता है :

केला	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓	8
संतरा	✓ ✓ ✓	3
सेब	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	5
अमरूद	✓ ✓ ✓ ✓	4

क्या आप रोनाल्ड की सारणी को समझ रहे हैं?

एक (✓) चिह्न क्या सूचित करता है?

चार विद्यार्थियों ने अमरूद को चुना। अमरूद के सम्मुख कितने (✓) चिह्न लगे हैं? कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं? ये सभी सूचनाएँ ज्ञात कीजिए। इन विधियों के बारे में चर्चा कीजिए। कौन-सी विधि सबसे अच्छी है? क्यों?

यदि बहुत अधिक ज्यादा आँकड़ों से सूचना प्राप्त करनी हो, तो कौन-सी विधि अधिक उपयोगी (लाभप्रद) है?

उदाहरण 1 : दोपहर के भोजन योजना के लिए एक शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थी के भोजन की रुचि जानना चाहता है। शिक्षक इस सूचना को एकत्रित करने का कार्य मारिया को सौंपता है। मारिया इसे एक कागज़ और एक पेंसिल लेकर करती है। भोजन की रुचियों को एक स्तम्भ में लिखकर, वह प्रत्येक विद्यार्थी की रुचि के लिए उस रुचि के सामने एक खड़ी लकीर (।) अंकित करती है।

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या
केवल चावल	|||||||||||||||||
केवल रोटी	|||||||||||||
चावल और रोटी दोनों	||||||||||||||||||||

उपरोक्त सारणी को देखकर, उमेश ने विद्यार्थियों को गिनने की एक बेहतर विधि का सुझाव दिया। उसने मारिया से चिह्नों (|) को दस-दस के समूहों में निम्न प्रकार व्यवस्थित करने को कहा :

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या
केवल चावल	(||||||||||) |||||||
केवल रोटी	(||||||||||) |||
चावल और रोटी दोनों	(||||||||||) (||||||||||)

राजन ने इसको और अधिक सरल बनाने के लिए उससे कहा कि वह दस-दस के समूहों के स्थान पर पाँच-पाँच के समूह बनाए, जैसा नीचे दिखाया जा रहा है :

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या	
केवल चावल	(|||||) (|||||) (|||||) ||	17
केवल रोटी	(|||||) (|||||) |||	13
चावल और रोटी दोनों	(|||||) (|||||) (|||||) (|||||)	20

शिक्षक ने सुझाव दिया कि पाँच-पाँच के प्रत्येक समूह में पाँचवा चिह्न एक तिरछी रेखा के रूप में प्रयोग किया जाए, जैसा कि

'卌' में दर्शाया गया है। इन चिह्नों को मिलान चिह्न (Tally Marks) कहते हैं। इस प्रकार, 卌 || यह दर्शाता है कि गिनने पर यह पाँच जमा दो (अर्थात् सात) है। और 卌 卌 यह दर्शाता है कि यह पाँच जमा पाँच (अर्थात् दस) है।

इसके साथ, सारणी निम्न प्रकार की दिखती है :

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या	
केवल चावल	卌 卌 卌 ||	17
केवल रोटी	卌 卌 |||	13
चावल और रोटी दोनों	卌 卌 卌 卌	20

उदाहरण 2 : एकता से उसकी कक्षा VI के विद्यार्थियों के जूतों के माप के बारे में आँकड़े एकत्रित करने के लिए कहा गया। उसने नीचे दर्शाए अनुसार अपने आँकडे लिखे :

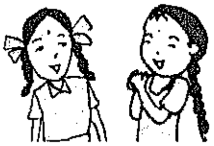
5	4	7	5	6	7	6	5	6	6	5
4	5	6	8	7	4	6	5	6	4	6
5	7	6	7	5	7	6	4	8	7	

जावेद निम्नलिखित सूचना जानना चाहता था:

(i) अधिकतम विद्यार्थियों द्वारा पहने जाने वाले जूते का नाप (ii) न्यूनतम विद्यार्थियों द्वारा पहने जाने वाले जूते का नाप। क्या आप इस सूचना को ज्ञात कर सकते हैं?

एकता ने मिलान चिह्नों का प्रयोग करके एक सारणी तैयार की:

जूतों का नाप	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
4	𝍸	5
5	𝍸 |||	8
6	𝍸 𝍸	10
7	𝍸 ||	7
8	||	2



अब पहले पूछे गए प्रश्नों का उत्तर सरलता से दिया जा सकता है। आप इसी प्रकार का क्रियाकलाप अपनी कक्षा में मिलान चिह्नों के प्रयोग द्वारा कर सकते हैं।

इन्हें कीजिए

1. केथरिन ने एक पासा (dice) लिया और उसको उछालने पर प्राप्त संख्या को लिख लिया। उसने इस कार्य को 40 बार किया और प्रत्येक बार प्राप्त संख्याओं को निम्न प्रकार लिखा :

1	3	5	6	6	3	5	4	1	6
2	5	3	4	6	1	5	5	6	1
1	2	2	3	5	2	4	5	5	6
5	1	6	2	3	5	2	4	1	5

एक सारणी बनाइए और आँकड़ों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके लिखिए।

अब, क्या आप निम्न संख्या (या संख्याएँ) ज्ञात कर सकते हैं?

(a) न्यूनतम बार आने वाली संख्या।

(b) अधिकतम बार आने वाली संख्या।

(c) समान बार आने वाली संख्याएँ।

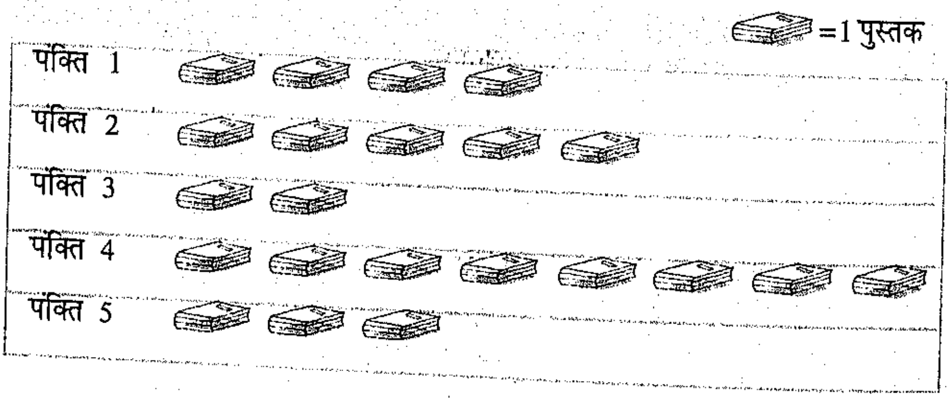
संख्या	मिलान चिह्न	कितनी बार
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2. अपने सहपाठियों के परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित सूचनाएँ एकत्रित कीजिए और उन्हें एक सारणी के रूप में निरूपित कीजिए। ज्ञात कीजिए कि किस समूह में अधिकांश विद्यार्थी हैं।

परिवार के सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	उतने परिवार के सदस्यों वाले विद्यार्थियों की संख्या

9.4 चित्रालेख

एक अलमारी में पाँच खाने हैं। प्रत्येक खाने में, पुस्तकें एक पंक्तिबद्ध रूप से रखी हुई हैं। विस्तृत जानकारी निम्न प्रकार सूचित की गई है :



किस पंक्ति में पुस्तकों की संख्या सबसे अधिक है? किस पंक्ति में पुस्तकों की संख्या सबसे कम है? क्या कोई ऐसी पंक्ति है जिसमें एक भी पुस्तक नहीं है?

आप उपरोक्त आलेख को देखकर ही इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इसमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में आपकी सहायता करते हैं। इसे एक **चित्रालेख** (**pictograph**) कहते हैं।

एक चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। इसको केवल देख कर ही आँकड़ों से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।

इन्हें कीजिए

समाचार पत्र और पत्रिकाएँ प्रायः पाठकों को आकर्षित करने के लिए चित्रालेखों का प्रयोग करते हैं।

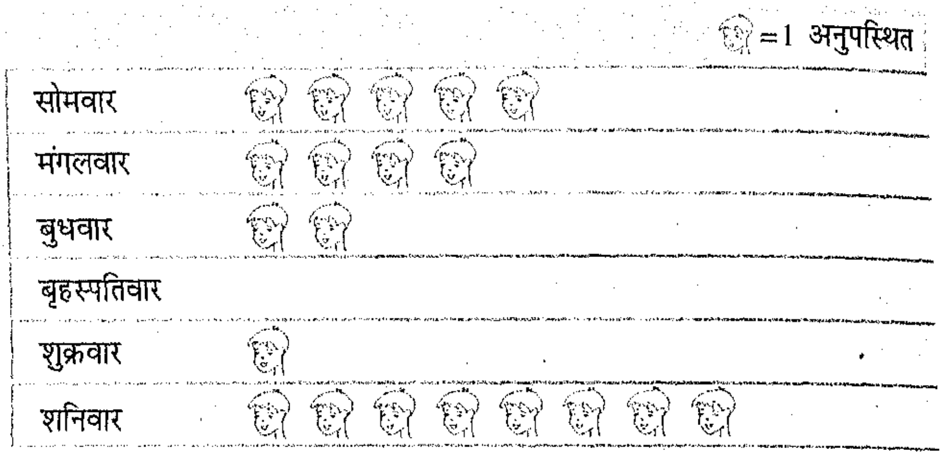
इस प्रकार प्रकाशित एक या दो चित्रालेखों को एकत्रित कीजिए और उन्हें अपनी कक्षा में प्रदर्शित कीजिए। यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि ये चित्रालेख क्या दर्शाते हैं।



एक चित्रालेख द्वारा प्रदान की गई सूचनाओं को समझने के लिए कुछ अभ्यास करने की आवश्यकता है।

9.5 एक चित्रालेख की व्याख्या

उदाहरण 3 : पिछले सप्ताह में, 30 विद्यार्थियों वाली एक विशिष्ट कक्षा में अनुपस्थित रहने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा विस्तृत रूप से दर्शाई गई है :



(a) किस दिन सबसे अधिक विद्यार्थी अनुपस्थित थे?

(b) किस दिन उपस्थिति 100% रही?

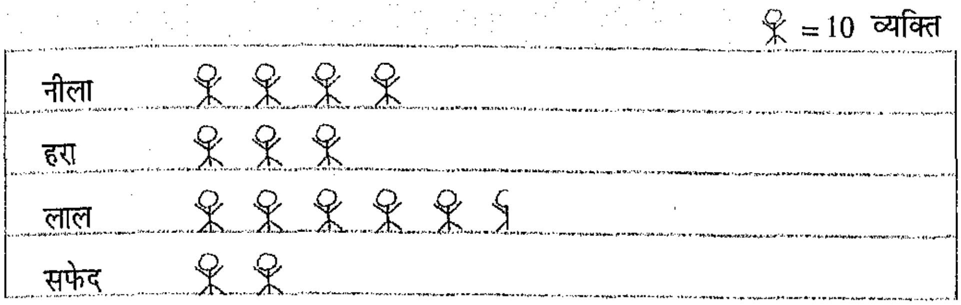
(c) इस सप्ताह में कुल अनुपस्थिति कितनी रही?

हल : (a) सबसे अधिक विद्यार्थी शनिवार को अनुपस्थित रहे। (इन आँकड़ों को निरूपित करने वाली शनिवार की पंक्ति में 8 चित्र हैं, अन्य दिनों के लिए चित्रों की संख्या कम है।)

(b) बृहस्पतिवार की पंक्ति में कोई चित्र नहीं है। इसका अर्थ है कि इस दिन कोई विद्यार्थी अनुपस्थित नहीं था। अर्थात् उस दिन कक्षा में 100% उपस्थिति रही।

(c) कुल मिलाकर यहाँ 20 चित्र हैं। इसलिए, इस सप्ताह में कुल अनुपस्थिति 20 रही।

उदाहरण 4 : किसी मोहल्ले के व्यक्तियों द्वारा पसंद किए गए फ्रिजों (Fridges) के रंगों की सूचना निम्न चित्रालेख द्वारा दर्शाई गई है :



(a) नीले रंग को पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(b) कितने व्यक्ति लाल रंग पंसद करते हैं?

हल : (a) नीला रंग पंसद करने वाले 40 व्यक्ति हैं?

[= 10 व्यक्ति। इसलिए ऐसे 4 चित्र 4×10 व्यक्ति दर्शाते हैं]।

(b) लाल रंग पंसद करने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करने के लिए, कुछ सोचना पड़ेगा।

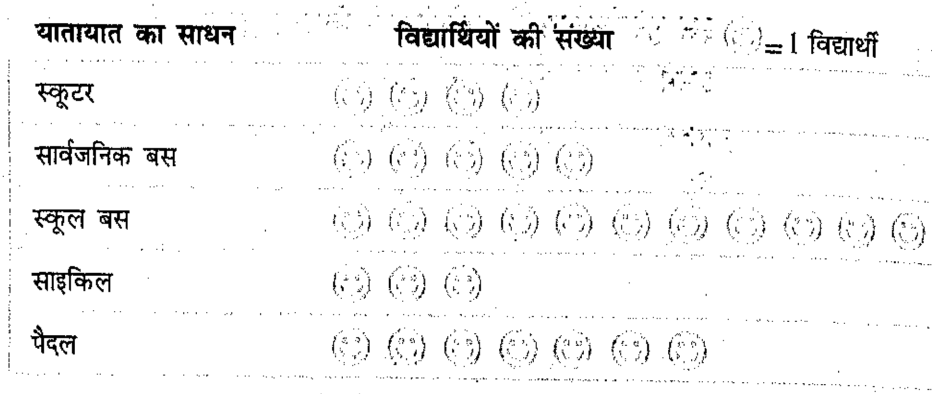
5 पूरे चित्रों के लिए, हमें $5 \times 10 = 50$ व्यक्ति प्राप्त होते हैं। अंतिम अधूरे चित्र के लिए हम इसे अनुमानित रूप से 5 व्यक्ति मान सकते हैं।

अतः लाल रंग पंसद करने वाले व्यक्तियों की संख्या 55 है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में, लाल रंग पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या $50 + 5 = 55$ ली है। यदि आपका मित्र इसे $50 + 8 = 58$ ले, तो क्या आप इसे स्वीकार करेंगे?

उदाहरण 5 : किसी स्कूल में एक सर्वेक्षण द्वारा यह पता लगाया गया कि प्रतिदिन स्कूल आने के लिए विद्यार्थी यातायात के किस साधन का प्रयोग करते हैं। कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों से साक्षात्कार किया गया और प्राप्त आँकड़ों को एक चित्रालेख के रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित किया गया :



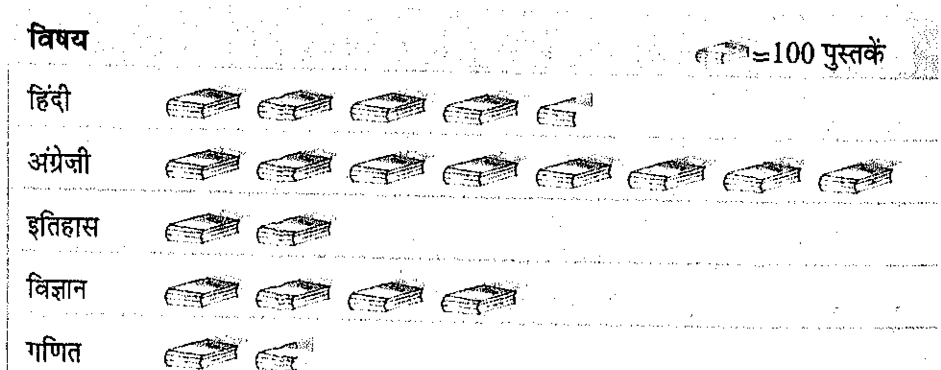
इस चित्रालेख को देख कर, आप तुरन्त निम्न प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं।

(a) क्या आप उन विद्यार्थियों की संख्या बता सकते हैं जो स्कूल आने के लिए स्कूटर का प्रयोग करते हैं? क्योंकि 1 संकेत 1 विद्यार्थी निरूपित करता है, इसलिए 4 संकेत 4 विद्यार्थियों को निरूपित करते हैं, जो स्कूटर से स्कूल आते हैं।

(b) इसी प्रकार, क्या आप उन विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं, जो साइकिल से या पैदल स्कूल आते हैं?

(c) सबसे अधिक पसंद का कौन-सा साधन है?

निम्न चित्रालेख किसी पुस्तकालय में रखी विभिन्न विषयों की पुस्तकों को दर्शाता है :



(a) इस पुस्तकालय में अंग्रेज़ी की कितनी पुस्तकें हैं?

(b) इसमें गणित की कितनी पुस्तकें हैं?

(c) किस विषय की पुस्तकें अधिकतम हैं?

(d) किस विषय की पुस्तकें न्यूनतम हैं?

हल (a) चूँकि एक संकेत 100 पुस्तकें निरूपित करता है, इसलिए 8 संकेत $8 \times 100 = 800$ पुस्तकें निरूपित करेंगे।

(b) ये पुस्तकें 100 और 200 के बीच में हैं (अर्थात् 100 से अधिक कैसे?)।

(c) अंग्रेज़ी की पुस्तकें अधिकतम हैं।

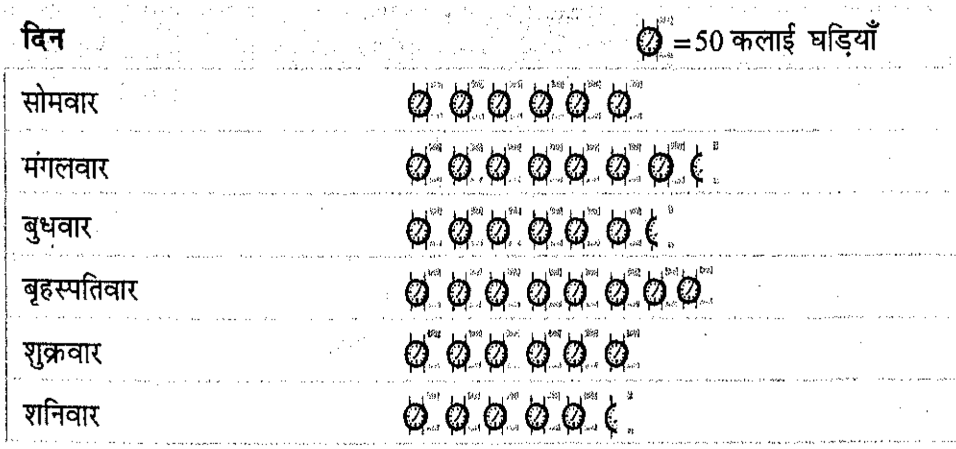
(d) गणित की पुस्तकें न्यूनतम हैं।

उपरोक्त चित्रालेख को देखकर पुस्तकालयाध्यक्ष यह निर्णय ले सकता है कि किस विषय की पुस्तकों को मँगाने का आर्डर दिया जाए।

यदि एक अलमारी में 300 पुस्तकें रखी जा सकती हैं, तो वह पुस्तकों की संख्या गिन कर आवश्यक अलमारियों का ऑर्डर भी दे सकता है।

यह चित्रालेख उसे यह निर्णय लेने में सहायता कर सकता है कि कितनी नई अलमारियाँ मंगवाई जानी चाहिए।

उदाहरण 7 किसी सप्ताह में, एक फैक्टरी द्वारा निर्मित कलाई घड़ियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है :



(a) किस दिन न्यूनतम कलाई घड़ियाँ निर्मित की गईं?

(b) किस दिन निर्मित कलाई घड़ियों की संख्या अधिकतम थी?

(c) इस विशेष सप्ताह में निर्मित कलाई घड़ियों की सन्निकट संख्या ज्ञात कीजिए?

हम एक सारणी बनाकर गिनती कर सकते हैं।

दिन	निर्मित कलाई घड़ियों की संख्या
सोमवार	300
मंगलवार	350 से अधिक और 400 से कम
बुधवार	....
बृहस्पतिवार	....
शुक्रवार	....
शनिवार	....

उपरोक्त सारणी को पूरा कीजिए और उत्तर ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 9.1

1. गणित के एक टेस्ट में 40 विद्यार्थियों द्वारा निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए। इन अंकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके, एक सारणी के रूप में व्यवस्थित कीजिए।

8	1	3	7	6	5	5	4	4	2
4	9	5	3	7	1	6	5	2	7
7	3	8	4	2	8	9	5	8	6
7	4	5	6	9	6	4	4	6	6

(a) ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थियों ने 7 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए।

(b) कितने विद्यार्थियों ने 4 से कम अंक प्राप्त किए?

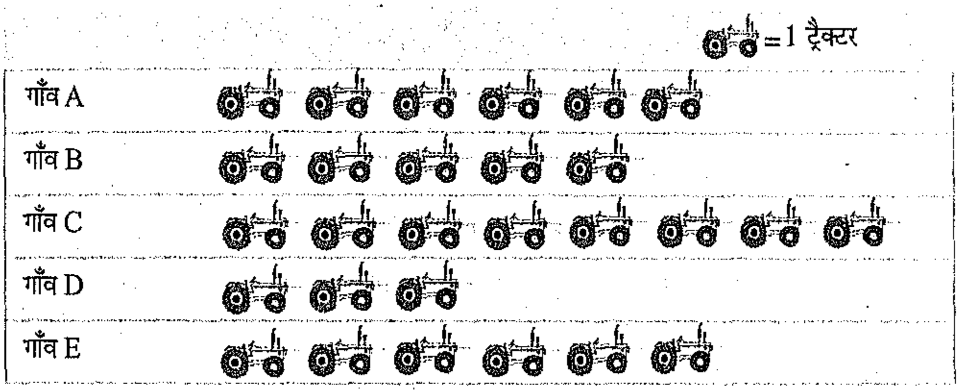
2. कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों की मिठाइयों की पसंद निम्नलिखित है :

लड्डू, बरफी, लड्डू, जलेबी, लड्डू, रसगुल्ला
जलेबी, लड्डू, बरफी, रसगुल्ला, लड्डू, जलेबी
जलेबी, रसगुल्ला, लड्डू, रसगुल्ला, जलेबी, लड्डू,
रसगुल्ला, लड्डू, बरफी, रसगुल्ला, रसगुल्ला
जलेबी, रसगुल्ला, लड्डू, रसगुल्ला, जलेबी, लड्डू।

(a) मिठाईयों के इन नामों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए।

(b) कौन सी मिठाई विद्यार्थियों द्वारा अधिक पसंद की गई?

3. निम्नलिखित चित्रालेख पाँच गाँवों में ट्रैक्टरों की संख्या दर्शाता है :



चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

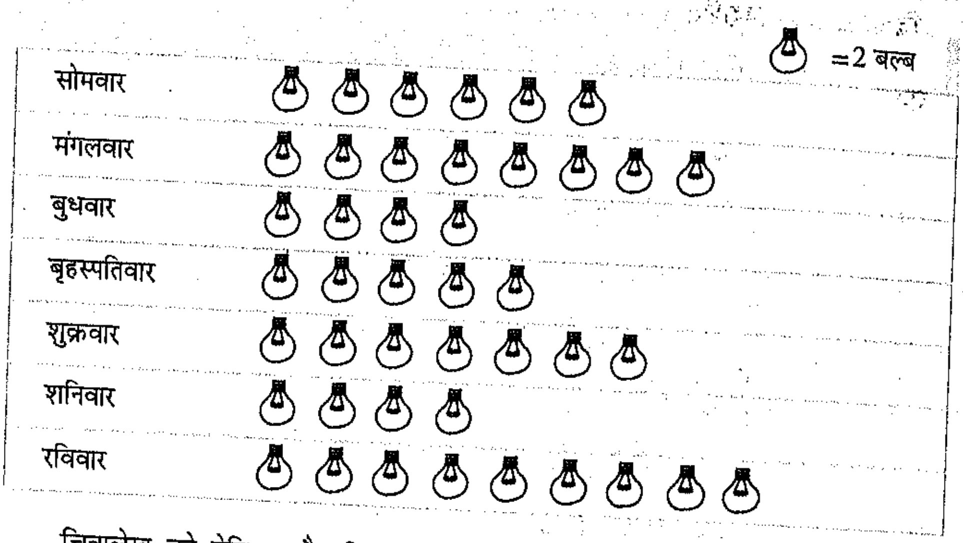
(i) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या न्यूनतम है?

(ii) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या अधिकतम है?

(iii) गाँव C में गाँव B से कितने ट्रैक्टर अधिक हैं?

(iv) पाँचों गाँवों में कुल मिलाकर कर कितने ट्रैक्टर हैं?

4. किस सप्ताह के विभिन्न दिनों में बिजली के बल्बों की बिक्री नीचे दर्शाई गई है:



चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) शुक्रवार को कितने बल्ब बेचे गए?

(b) किस दिन बेचे गए बल्बों की संख्या अधिकतम थी?

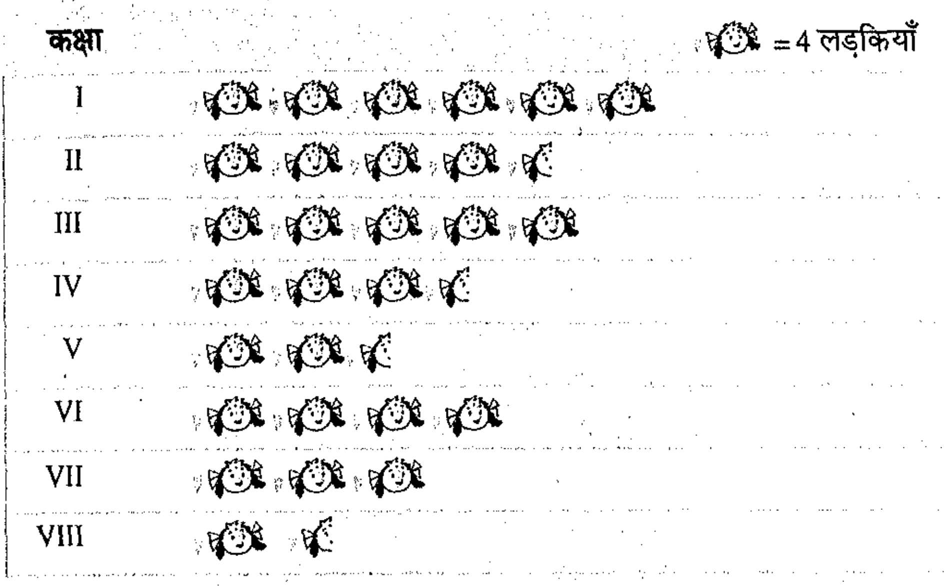
(c) यदि एक बल्ब 10 रु. में बेचा गया हो तो रविवार को कुल कितनी बिक्री हुई?

(d) क्या आप पूरे सप्ताह की कुल बिक्री ज्ञात कर सकते हैं?



(e) यदि एक बड़े डिब्बे में 9 बल्ब आ सकते हैं, तो इस सप्ताह कितने डिब्बों की आवश्यकता पड़ी?

5. एक सह-शिक्षा माध्यमिक विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में लड़कियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है :



इस चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

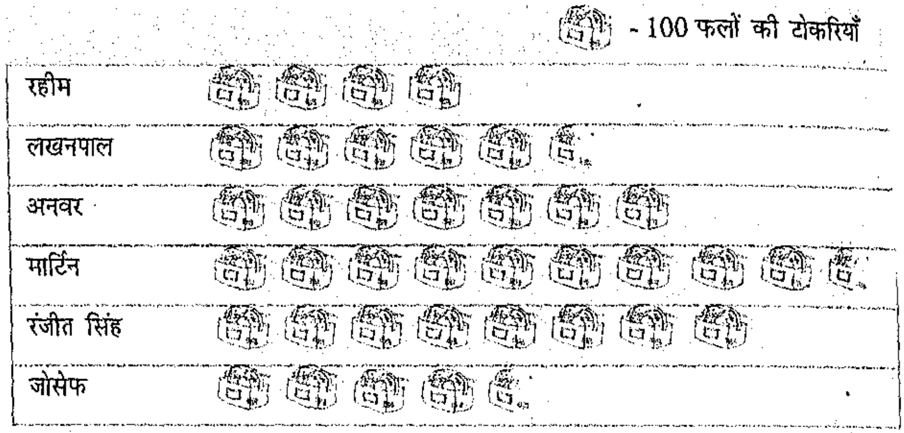
(a) किस कक्षा में लड़कियों की संख्या न्यूनतम है?

(b) क्या कक्षा VI में लड़कियों की संख्या कक्षा V की लड़कियों की संख्या से कम है?

(c) कक्षा VII में कितनी लड़कियाँ हैं?



6. एक विशेष मौसम में, एक गाँव में 6 फल विक्रेताओं द्वारा बेची गई फलों की टोकरियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है :



इस चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किस फल विक्रेता ने अधिकतम फलों की टोकरियाँ बेची?

(b) अनवर ने फलों की कितनी टोकरियाँ बेचीं?

(c) वे विक्रेता जिन्होंने 600 या उससे अधिक टोकरियाँ बेचीं, अगले मौसम में गोदाम खरीदने की योजना बना रहे हैं। क्या आप इनके नाम बता सकते हैं?

9.6 चित्रालेखों का खींचना

चित्रालेखों को खींचना एक रोचक क्रिया है। परंतु कभी-कभी कोई संकेत जैसे कि  (जो पीछे दिए गए उदाहरणों में से एक उदाहरण में प्रयोग किया जा चुका है) इकाइयों के गुणज (Multiple) के रूप में भी प्रयोग हो सकता है तथा इसे खींचने में कठिनाई भी हो सकती है। इनके स्थान पर हम सरल संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं।

यदि  5 विद्यार्थियों को निरूपित करता है, तो आप 4 या 3 विद्यार्थियों को किस प्रकार निरूपित करेंगे? हम ऐसी स्थिति की निम्न प्रकार से कल्पना करके हल कर सकते हैं :

 5 विद्यार्थी निरूपित करता है, तो  4 विद्यार्थी निरूपित करता है,

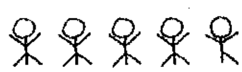
 3 विद्यार्थी निरूपित करता है,  2 विद्यार्थी निरूपित करता है,

 1 विद्यार्थी निरूपित करता है। इसके बाद निरूपण का कार्य प्रारंभ करें।

उदाहरण 8 किसी सप्ताह में, एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों की उपस्थिति निम्नलिखित है। इसे एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

दिन	**उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या**
सोमवार	24
मंगलवार	26
बुधवार	28
बृहस्पतिवार	30
शुक्रवार	29
शनिवार	22

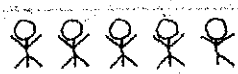
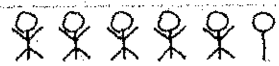
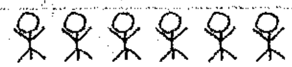
हल पहली की गई कल्पना के अनुसार,

24 को  से निरूपित किया जा सकता है,

26 को  निरूपित किया जा सकता है,

इत्यादि।

इस प्रकार, चित्रालेख निम्न होगा :

दिन	विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

यहाँ हमने एक प्रकार का समझौता किया है कि '5 से कम' को एक चित्र द्वारा कैसे निरूपित करें। इस प्रकार के चित्रों को तोड़ना सदैव संभव नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में हम क्या करें?

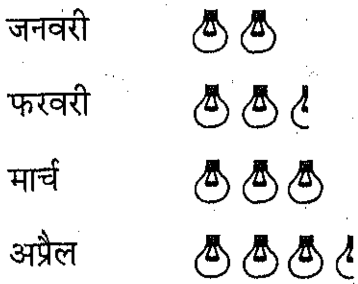
निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए :

उदाहरण 9 : किसी वर्ष के प्रथम चार महीनों में, किसी विश्राम गृह के लिए खरीदे गए बिजली के बल्बों की संख्या निम्नलिखित है :

महीना	बल्बों की संख्या
जनवरी	10
फरवरी	13
मार्च	15
अप्रैल	17

उपरोक्त को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

हल : मान लीजिए  5 बल्बों को निरूपित करता है।



यहाँ जनवरी और मार्च के लिए चित्र बनाना कठिन नहीं है। परंतु 13 और 17 को चित्रों द्वारा निरूपित करना सरल नहीं है। परंतु फिर भी हमने इस जानकारी को एक मोटे तौर पर दर्शा दिया है।

ध्यान दीजिए कि इस प्रकार के चित्रालेखों को पढ़ते समय, इनकी व्याख्या व्यक्तियों के अनुसार अलग-अलग हो सकती है। फिर भी स्थिति के एक व्यापक दृष्टिकोण का अनुमान लगाया जा सकता है।

प्रश्नावली 9.2

1. पाँच गाँवों में पशुओं की कुल संख्या इस प्रकार है :

गाँव A	:	80
गाँव B	:	120
गाँव C	:	90
गाँव D	:	40
गाँव E	:	60

संकेत ⊗ का प्रयोग करके जो 10 पशुओं को निरूपित करता है, इन पशुओं का एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) गाँव E के पशुओं को कितने संकेत निरूपित करते हैं?

(b) किस गाँव में पशुओं की संख्या अधिकतम है?

(c) किस गाँव में अधिक पशु हैं : गाँव A या गाँव C में?

2. विभिन्न वर्षों में एक स्कूल के विद्यार्थियों की कुल संख्या निम्न सारणी द्वारा प्रदर्शित है :

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
1996	400
1998	535
2000	472
2002	600
2004	623

A. एक संकेत  का प्रयोग करके, जो 100 विद्यार्थियों को निरूपित करता है, एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) वर्ष–2002 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

(b) वर्ष–1998 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

B. कोई और संकेत लेकर, जो 50 विद्यार्थियों को निरूपित करता हो, एक अन्य चित्रालेख बनाइए। कौन-सा चित्रालेख अधिक सूचनाप्रद है?

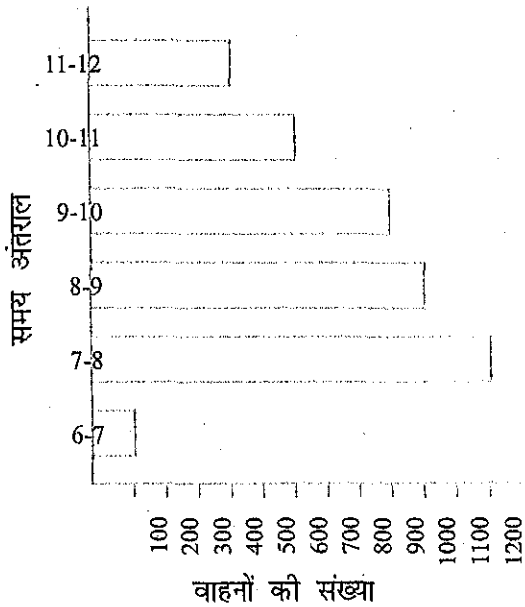
9.7 दंड आलेख

आँकड़ों को चित्रालेखों द्वारा निरूपित करने में न केवल समय अधिक लगता है बल्कि कभी-कभी यह कठिन भी होता है। आइए आँकड़ों को निरूपित करने की कोई अन्य चित्रीय विधि देखें। एक समान चौड़ाई (uniform width) के क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर दंड (bars) खींचे जा सकते हैं, जिनके बीच में समान दूरी रखी जाती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दंड की लंबाई दी हुई संख्या (मान) को निरूपित करती है। आँकड़ों को प्रस्तुत करने का यह चित्रीय निरूपण एक दंड आरेख (bar diagram) या दंड आलेख (bar graph) कहलाता है।

9.7.1 दंड आलेख की व्याख्या

आइए किसी विशेष दिन यातायात पुलिस द्वारा दिल्ली के एक भीड़ वाले व्यस्त चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों के बारे में किए गए अध्ययन के उदाहरण पर

विचार करें। प्रातः 6 बजे से दोपहर 12 बजे तक प्रत्येक घंटे में उस चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों की संख्या नीचे दिए दंड आलेख में दर्शाई गई है। एक इकाई (Unit) को सांकेतिक रूप से, एक खाने (Box) से निरूपित किया गया है।(एक इकाई = 1)



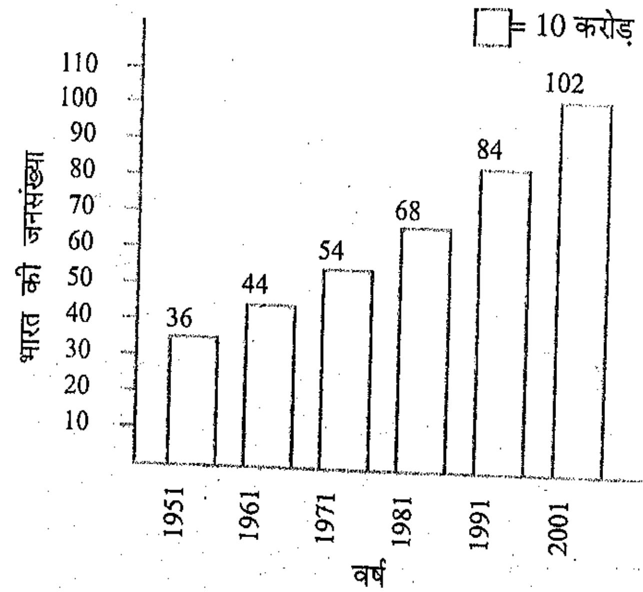
पैमाना है : "1 इकाई (मात्रक) लंबाई = 100 वाहन"

हम देख सकते हैं कि अधिकतम यातायात सबसे लंबे दंड अर्थात् 1200 वाहनों से निरूपित है और यह प्रातः सात से आठ बजे के अंतराल में है। इससे ठीक छोटा दंड 8 से 9 बजे के बीच में है।

इसी प्रकार, न्यूनतम यातायात दर्शाने वाला सबसे छोटा दंड (अर्थात् 100 वाहनों) से है। यह प्रातः 6 से 7 बजे के के अंतराल में है। इस छोटे दंड से ठीक अगला दंड 11 से 12 बजे के बीच के समय का है।

दो अति व्यस्त घंटों (8.00-10.00 बजे) में कुल यातायात (स्कूल, कार्यालय और व्यापारिक संस्थानों के लिए) 1000 + 900 = 1900 वाहन हैं, जो दो लंबे दंडों द्वारा प्रदर्शित है।

यदि आँकड़ों में संख्याएँ बड़ी हों, तो आपको एक भिन्न पैमाने (scale) की आवश्यकता पड़ेगी। उदाहरणार्थ, भारत की जनसंख्या वृद्धि की स्थिति को लीजिए। ये संख्या करोड़ों में है। इसलिए, यदि आप 1 इकाई = 1 व्यक्ति लेंगे, तो दंड खींचना संभव नहीं हो पाएगा। अतः इस तरह का पैमाना चुनिए कि 1 इकाई 10 करोड़ निरूपित करती हो। इस स्थिति में, दंड आलेख निम्न आकृति में दर्शाया गया है :



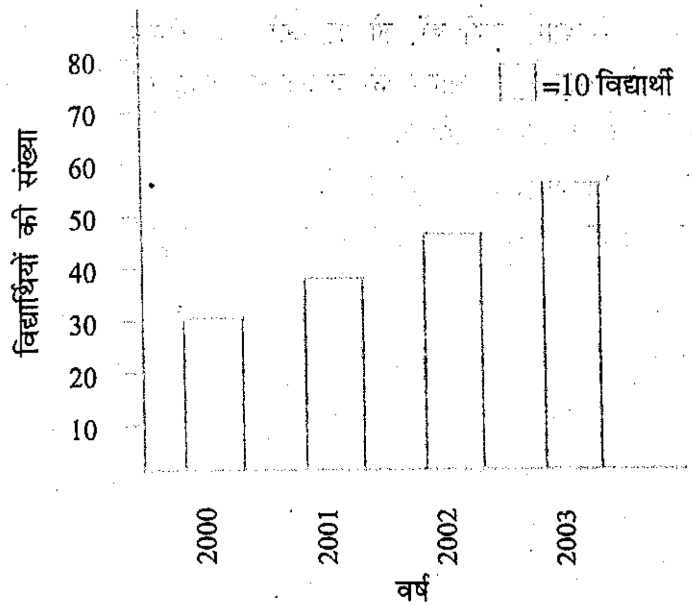
इसलिए, 5 इकाई लंबाई का दंड 50 करोड़ निरूपित करता है और 8 इकाई लंबाई का दंड 80 करोड़ निरूपित करता है।

उदाहरण 10 :किसी स्कूल की एक विशेष कक्षा के निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए और निम्न प्रश्नों को उत्तर दीजिए :

(a) इस आलेख का पैमाना क्या है?

(b) प्रत्येक वर्ष स्कूल में कितने नए विद्यार्थी प्रवेश पाते हैं?

(c) क्या वर्ष 2003 में विद्यार्थियों की संख्या वर्ष 2000 के विद्यार्थियों की संख्या की दोगुनी है?

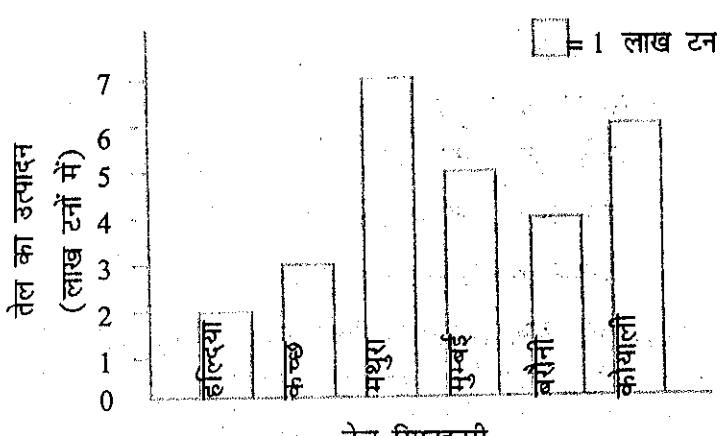


(a) पैमाना है : 1 इकाई लंबाई = 10 विद्यार्थी

अब (b) और (c) स्वयं कीजिए।

इन्हें कीजिए

निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए :



अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) यह आलेख क्या सूचना प्रदर्शित करता है?

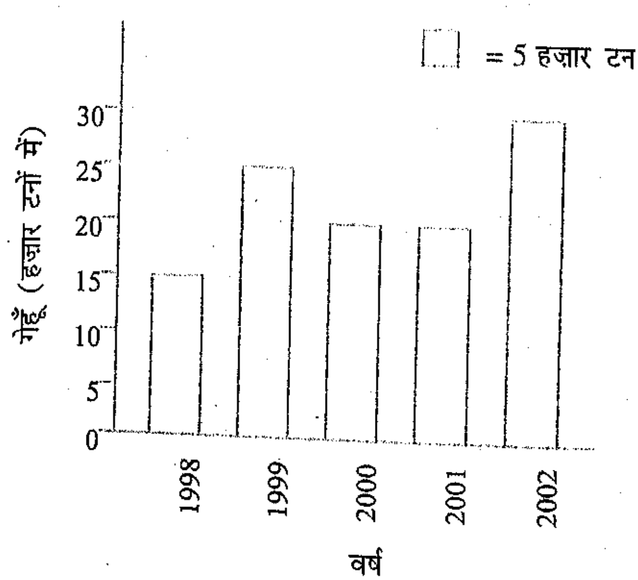
(b) कौन-सा तेल शोधक कारखाना (refinery) अधिकतम तेल उत्पादित करता है?

(c) उन तेल शोधक कारखानों के नाम लिखिए जो 4 लाख टन से कम तेल का उत्पादन करते हैं।

(d) मुम्बई तेल शोधक कारखाना कितने तेल का उत्पादन करता है?

प्रश्नावली 9.3

1. नीचे दिया हुआ दंड आलेख वर्ष 1998-2002 में सरकार द्वारा खरीदे गए गेहूँ की मात्रा दर्शाता है :

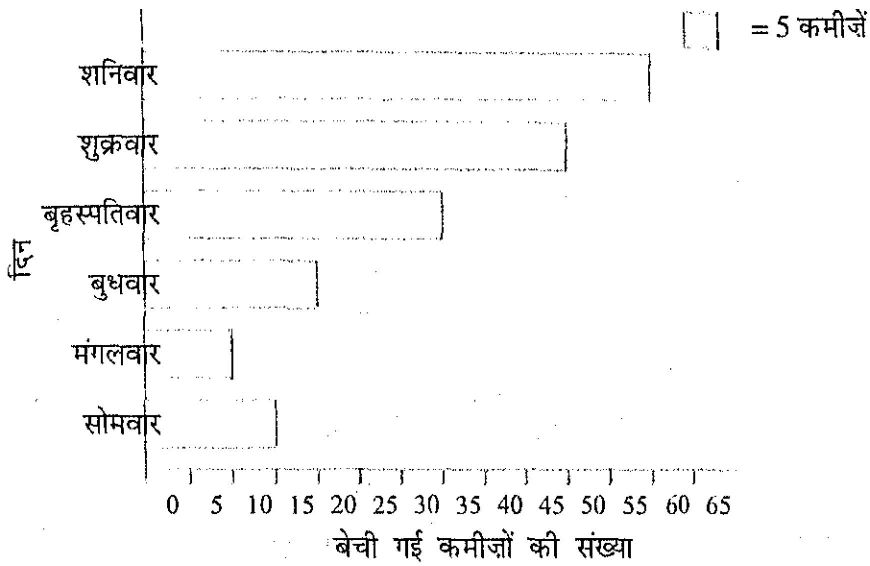


इस दंड आलेख को पढ़िए और अपने प्रेक्षणों को लिखिए।

(a) किस वर्ष में गेहूँ का अधिकतम उत्पादन हुआ?

(b) किस वर्ष में गेहूँ का न्यूनतम उत्पादन हुआ?

2. इस दंड आलेख को देखिए जो एक रेडीमेड कपड़ों की दुकान में सोमवार से शनिवार तक हुई कमीजों की बिक्री को दर्शाता है।



अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) उपरोक्त दंड आलेख में क्या सूचना दर्शाई गई है?

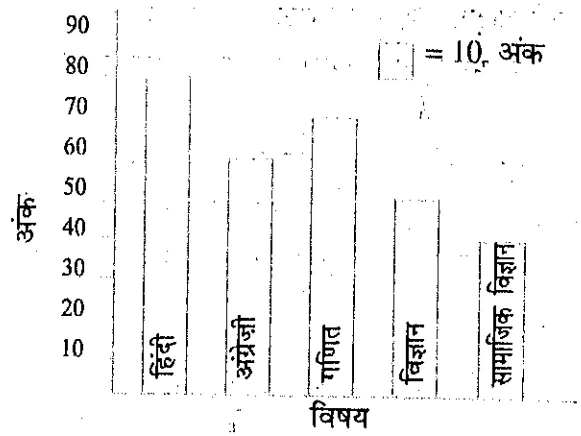
(b) कमीजों की संख्या को निरूपित करने के लिए क्षैतिज रेखा पर क्या पैमाना लिया गया है?

(c) किस दिन अधिकतम कमीजें बेची गईं और कितनी संख्या में कमीज़ें बेची गईं, लिखें?

(d) किस दिन न्यूनतम संख्या में कमीज़ें बेची गईं?

(e) बृहस्पतिवार को कितनी कमीजें बेची गईं?

3. इस दंड आलेख को देखिए जो अज़ीज द्वारा अर्धवार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्राप्त किए गए अंकों को प्रदर्शित करता है।



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

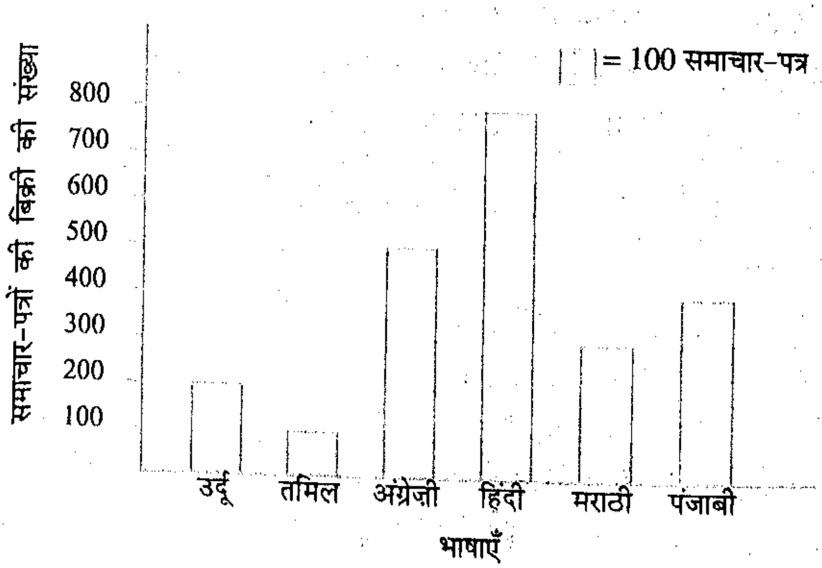
(a) यह दंड आलेख क्या सूचना प्रदर्शित करता है?

(b) किस विषय में अज़ीज ने अधिकतम अंक प्राप्त किए?

(c) किस विषय में उसने न्यूनतम अंक प्राप्त किए?

(d) विषयों के नाम लिखिए और उनमें से प्रत्येक में प्राप्त किए गए अंक भी लिखिए।

4. निम्नलिखित दंड आलेख एक शहर में छः भाषाओं में दैनिक समाचार-पत्रों की बिक्री की संख्या दर्शाता है :



इस दंड आलेख को पढ़िए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) हिंदी, पंजाबी, उर्दू, मराठी और तमिल में समाचार-पत्रों की बिक्री की संख्या ज्ञात कीजिए।

(b) किस भाषा में सबसे कम समाचार-पत्रों की बिक्री है?

(c) हिंदी और अंग्रेज़ी में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्या का अंतर ज्ञात कीजिए।

(d) विभिन्न भाषाओं में पढ़े जाने वाले समाचार-पत्रों की संख्याओं को आरोही-क्रम में लिखिए।

9.7.2 दंड आलेख का खींचना

उस उदाहरण को याद कीजिए जिसमें रोनाल्ड ने अपने सहपाठियों द्वारा पसंद किए जाने वाले फलों के लिए सारणी बनाई थी।

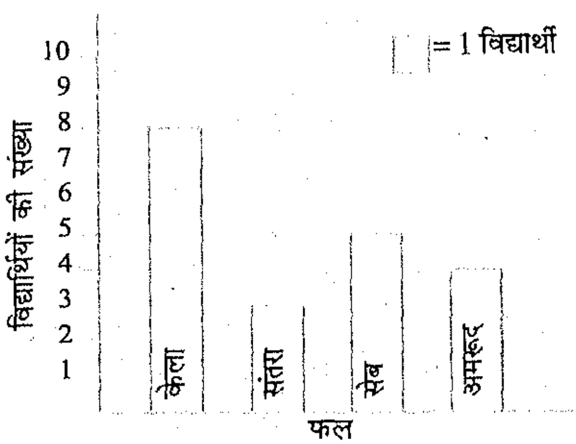
फल का नाम	केला	संतरा	सेब	अमरूद
विद्यार्थियों की संख्या	8	3	5	4

पहले एक क्षैतिज और एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचिए। क्षैतिज रेखा पर फलों को निरूपित करने वाले दंड खींचिए और ऊर्ध्वाधर रेखा पर संख्यांक लिखिए जो विद्यार्थियों की संख्या निरूपित करते हैं।

आइए एक आसान-सा पैमाना चुनें। इसका अर्थ है कि हम यह चुनेंगे कि 1 इकाई लंबाई द्वारा कितने विद्यार्थी निरूपित होंगे।

यहाँ हम 1 इकाई लंबाई = 1 विद्यार्थी लेते हैं।

हमें नीचे दर्शाया गया दंड आलेख प्राप्त होता है :



उदाहरण 11 : निम्नलिखित सारणी इमरान के परिवार की विभिन्न मदों में होने वाले मासिक व्यय को निरूपित करती है :

मद	व्यय (रु. में)
मकान किराया	3000
भोजन	3400
शिक्षा	800
बिजली	400
परिवहन	600
विविध	1200

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में निरूपित करने के चरण निम्न हैं :

(a) परस्पर दो लंब रेखाएँ खींचिए, एक ऊर्ध्वाधर और एक क्षैतिज।

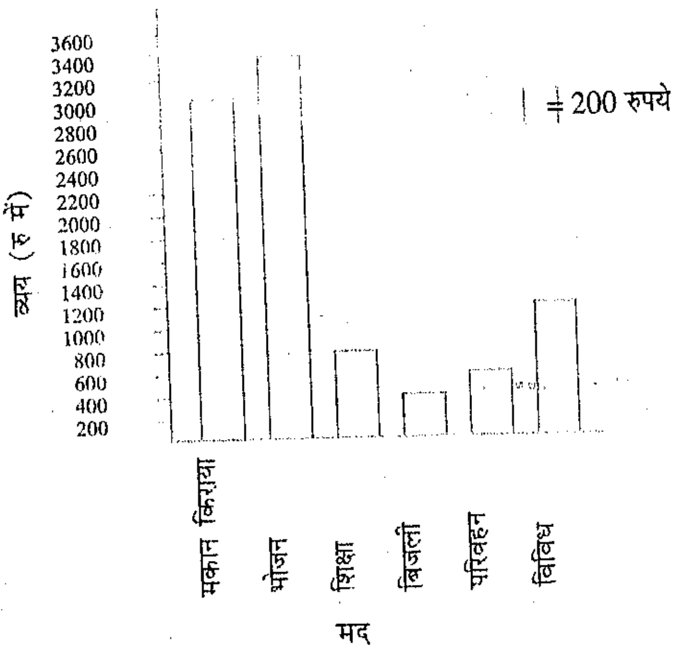
(b) क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'मद' अंकित कीजिए और ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय (रु में) अंकित कीजिए।

(c) समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड बनाइए।

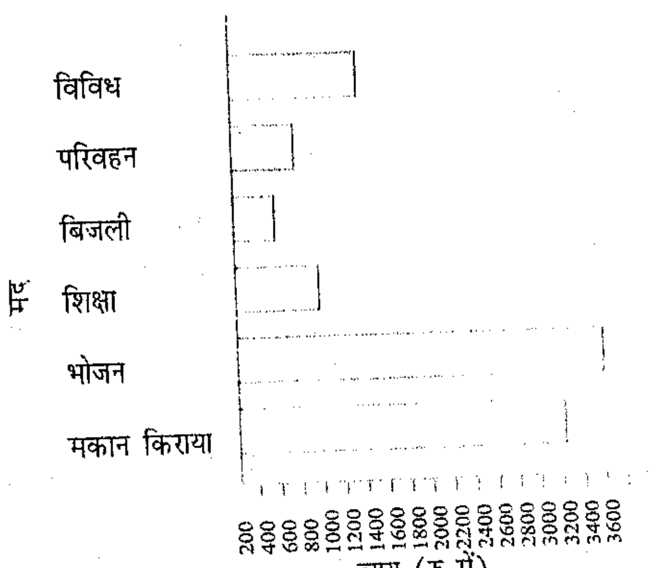
(d) ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लीजिए। मान लीजिए 1 इकाई लंबाई = 200 रु है और इसके अनुसार संगतमान अंकित कीजिए।

विभिन्न मदों के लिए, दंडों की लंबाई परिकल्पित कीजिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

मकान किराया	:	3000 ÷ 200 = 15 इकाई
भोजन	:	3400 ÷ 200 = 17 इकाई
शिक्षा	:	800 ÷ 200 = 4 इकाई
बिजली	:	400 ÷ 200 = 2 इकाई
परिवहन	:	600 ÷ 200 = 3 इकाई
विविध	:	1200 ÷ 200 = 6 इकाई



इन्हीं आँकड़ों को, 'मद' और 'व्यय' की स्थितियों को अक्षों पर परस्पर बदलकर, निम्न प्रकार भी दर्शाया जा सकता है :



इन्हें कीजिए

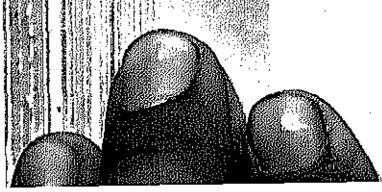
निम्नलिखित सारणी किसी शहर में वर्ष 1994–2004 के अंतराल में प्रत्येक दो वर्षों के बाद लगाए गए वृक्षों की संख्या दर्शाती है :

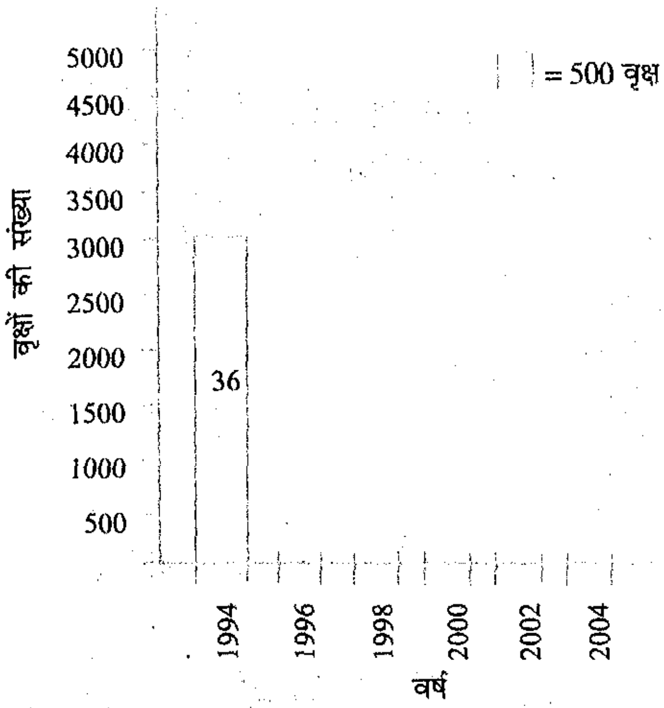
वर्ष		लगाए गए वृक्षों की संख्या
1994	-	3000
1996	-	2000
1998	-	4000
2000	-	5000
2002	-	6000
2004	-	3000

1 इकाई लंबाई = 500 वृक्ष लेकर, इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में व्यक्त कीजिए।

क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'वर्ष' अंकित कीजिए और ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश 'वृक्षों की संख्या' को अंकित कीजिए। अब दंडों की लंबाइयों (ऊँचाइयाँ) ज्ञात कीजिए।

1994	-	3000 ÷ 500	=	6 इकाई
1996	-	2000 ÷ 500	=	4 इकाई
1998	-	4000 ÷ 500	=	....
2000	-	5000 ÷ 500	=	....
2002	-	....	=	....
2004	-	....	=	....





उपरोक्त दंड आलेख के शेष दंडों को खींचकर पूरा कीजिए। इस दंड आलेख से (i) वह वर्ष ज्ञात कीजिए जिसमें लगाए गए वृक्षों की संख्या अधिकतम थी और (ii) वह वर्ष ज्ञात कीजिए जिसमें लगाए गए वृक्षों की संख्या न्यूनतम थी।

इन्हें कीजिए

1. किसी दुकानदार द्वारा छः क्रमागत दिनों में बेची गईं गणित की पुस्तकों की संख्या नीचे दर्शाई गई है :

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार
बेची गई पुस्तकों की संख्या	65	40	30	50	20	70

अपनी पसंद के अनुसार एक पैमाना चुनकर, उपरोक्त सूचना को एक दंड आलेख से निरूपित कीजिए।

2. अपने मित्रों के साथ पाँच और ऐसी स्थितियों के बारे में सोचिए, जहाँ हम आँकड़े प्राप्त कर सकते हैं। संख्याओं का प्रयोग करके सारणियाँ बनाइए और उन्हें दंड आलेखों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

प्रश्नावली 9.4

1. एक स्कूल के 120 विद्यार्थियों का इस आशय से सर्वेक्षण किया गया कि वे अपने खाली समय में किस क्रियाकलाप को पसंद करते हैं। निम्न आँकड़े प्राप्त हुए :

पसंद का क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	45
कहानी की पुस्तक पढ़ना	30
टी.वी. देखना	20
संगीत सुनना	10
पेंटिंग	15

1 इकाई लंबाई = 5 विद्यार्थी का पैमाना लेकर, एक दंड आलेख बनाइए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप अधिकांश विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया जाता है?

2. वर्ष 1998 से 2002 के बीच एक फैक्टरी द्वारा निर्मित साइकिलों की संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा दर्शाई गई है :

वर्ष	निर्मित साइकिलों की संख्या
1998	800
1999	600
2000	900
2001	1100
2002	1200

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए। अपनी पसंद का पैमाना चुनिए।

(a) किस वर्ष में अधिकतम संख्या में साइकिल निर्मित की गईं?

(b) किस वर्ष में न्यूनतम संख्या में साइकिल निर्मित की गईं?

3. किसी शहर के व्यक्तियों की संख्या विभिन्न आयु समूहों के अनुसार नीचे दी सारणी में दी हुई है :

आयु समूह (वर्षों में)	1-14	15-29	30-44	45-59	60-74	75 और उससे ऊपर
व्यक्तियों की संख्या	2 लाख	1 लाख 60 हज़ार	1 लाख 20 हज़ार	1 लाख 20 हज़ार	80 हज़ार	40 हज़ार

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए। (1 इकाई लंबाई = 1 हज़ार लीजिए)

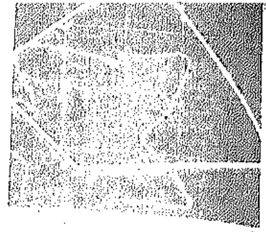
निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किन दो आयु समूहों में जनसंख्या बराबर है?

(b) 60 वर्ष और उससे अधिक आयु के सभी व्यक्ति वरिष्ठ नागरिक कहलाते हैं। इस शहर में कितने वरिष्ठ नागरिक हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने देखा कि आँकड़े कुछ सूचना देने के लिए एकत्रित की गई संख्याओं के संग्रह होते हैं।
2. दिए हुए आँकड़ों से कोई विशेष सूचना तुरंत प्राप्त करने के लिए, उन्हें मिलान चिह्नों का प्रयोग करके सारणियों में प्रकट (प्रस्तुत) किया जा सकता है।
3. हमने सीखा कि किस प्रकार चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। हमने चित्रालेखों की व्याख्या करना भी सीखा और उनसे संबंधित प्रश्नों के उत्तर देना भी सीखा है। हमने कुछ वस्तुओं के संकेतों से निरूपित करके चित्रालेखों को खींचना भी सीखा है। उदाहरणार्थ  = 100 पुस्तकें लेकर।
4. हमने चर्चा की है कि आँकड़ों को एक दंड आरेख या एक दंड आलेख द्वारा कैसे निरूपित किया जाता है। एक दंड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से खींचे जाते हैं। प्रत्येक दंड की लंबाई वाँछित सूचना दर्शाती है।
5. ऐसा करने के लिए, हमने आलेख के लिए एक पैमाना चुनने की प्रक्रिया की भी चर्चा की है। उदाहरणार्थ, 1 इकाई = 100 विद्यार्थी। हमने दंड आलेखों को पढ़ने का अभ्यास भी किया है। हमने इसकी व्याख्या करना भी सीखा है।

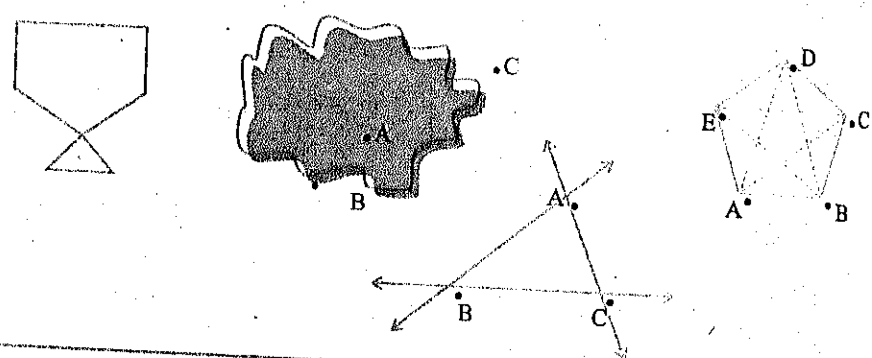


अध्याय 10

क्षेत्रमिति

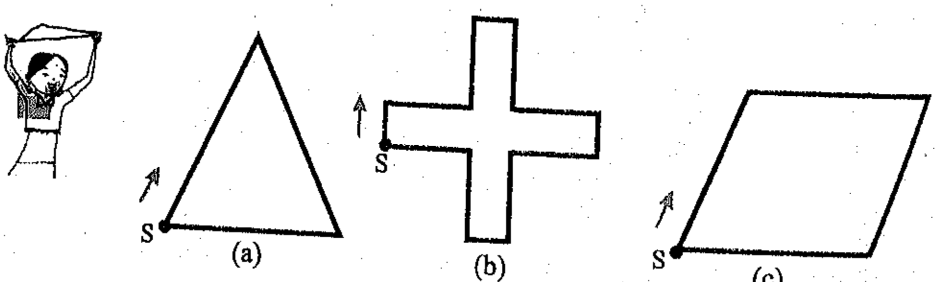
10.1 भूमिका

जब हम तल की आकृतियों के बारे में बात करते हैं तो हम उन आकृतियों के क्षेत्र तथा परिसीमा के बारे में भी विचार करते हैं। हमें इन आकृतियों की तुलना के लिए कुछ मापों की आवश्यकता होती है। आइए हम कुछ ऐसी ही आकृतियों को देखते हैं।



10.2 परिमाप

आइए नीचे दी गई आकृति 10.1 को देखते हैं। आप इन आकृतियों को एक तार अथवा धागे की सहायता से भी बना सकते हैं।



आकृति 10.1

यदि आप बिंदु S से आरम्भ करके रेखाखंडों के साथ-साथ (अनुदिश) चलते हैं तो आप पुन: बिंदु S पर पहुँच जाते हैं। इस प्रकार आपने आकार (आकृति) के चारों तरफ अथवा किनारे-किनारे का एक पूरा चक्कर लगाया। यह तय की गई दूरी इन आकृतियों को बनाने में लगे तार की लंबाई के बराबर है।

यह दूरी बंद आकृतियों का परिमाप कहलाती है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि इन आकृतियों को बनाने में लगे तार की लंबाई ही परिमाप है।

हमारे दैनिक जीवन में परिमाप की संकल्पना का बहुतायत प्रयोग होता है जैसे :

- एक किसान जो अपने खेत के चारों तरफ बाड़ लगाना चाहता है।
- एक इंजीनियर जो अपने घर के चारों तरफ एक चारदीवारी बनाने की योजना तैयार करता है।
- एक व्यक्ति जो खेल कराने के लिए एक पथ तैयार करता है।

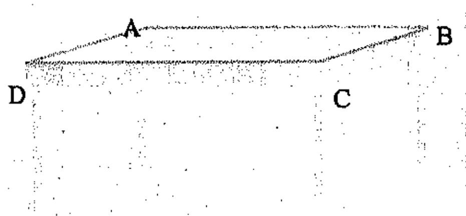
ये सभी व्यक्ति 'परिमाप' की संकल्पना का प्रयोग करते हैं।

ऐसी पाँच स्थितियों का उदाहरण दीजिए जहाँ पर आपको परिमाप को जानने की आवश्यकता होती है।

अत: परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखाखंडों के साथ-साथ चलते हुए एक बंद आकृति बनाती है, जब आप उस आकृति के चारों तरफ एक पूरा चक्कर लगाते हैं।

प्रयास कीजिए

1. अपनी अध्ययन टेबल के ऊपरी चारों सिरों की लंबाइयों को मापिए तथा उन्हें लिखिए।



AB = ____ सेमी

BC = ____ सेमी

CD = ____ सेमी

DA = ____ सेमी

अब चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

= AB + BC + CD + DA

= ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी

= _____ सेमी

क्या आप बता सकते हैं कि परिमाप कितना है?

2. अपनी नोटबुक के एक पृष्ठ की चारों भुजाओं की लंबाइयों को मापिए और उन्हें लिखिए।

चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

= AB + BC + CD + DA = ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी

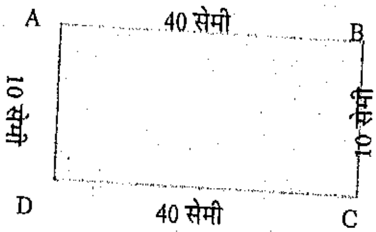
= _____ सेमी

पृष्ठ का परिमाप कितना है?

3. मीरा 150 मी लंबाई तथा 80 मी चौड़ाई वाले एक पार्क में जाती है। वह इस पार्क का पूरा एक चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की दूरी ज्ञात कीजिए।

निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए :

(a)

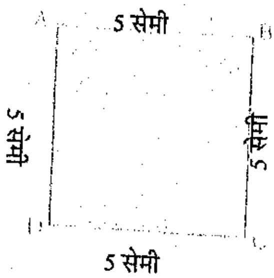


परिमाप = AB + BC + CD + DA

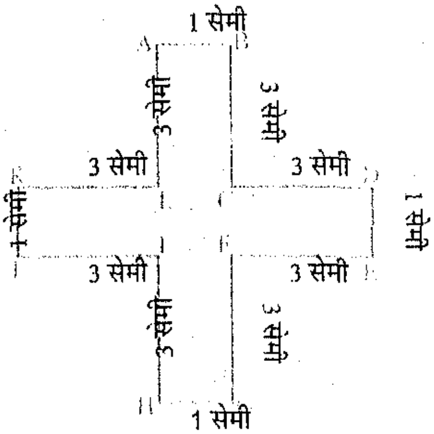
= __ + __ + __ + __

= ___

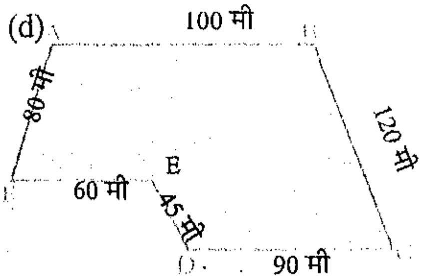
(b)



परिमाप =

(c) 

परिमाप =

(d) 

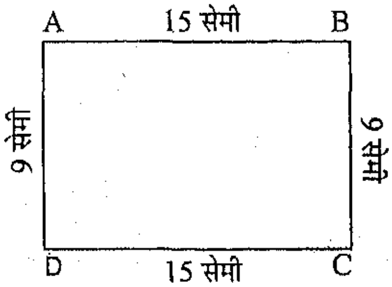
परिमाप =
AB + BC + CD + DE + EF + FA
= __ + __ + __ + __ + __ + __
= ______

इस प्रकार, आप रेखाखंडों के द्वारा निर्मित बंद आकृति का परिमाप कैसे निकालेंगे? साधारणतया, सभी भुजाओं की लंबाइयों का योगफल ज्ञात करके (जो कि रेखाखंड हैं)।

10.2.1 आयत का परिमाप

आइए अब हम एक आयत ABCD (आकृति 10.2) पर विचार करते हैं जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 15 सेमी तथा 9 सेमी हैं। आयत का परिमाप कितना होगा?

आयत का परिमाप = चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल



आकृति 10.2

$= AB + BC + CD + DA$

$= AB + BC + AB + BC$

$= 2 \times AB + 2 \times BC$

$= 2 \times (AB + BC)$

$= 2 \times$ (15 सेमी + 9 सेमी)

$= 2 \times$ (24 सेमी)

= 48 सेमी

याद रखिए आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती है। इसीलिए
$AB = CD$
$DA = BC$



अत: ऊपर दिए हुए उदाहरण में, हमने देखा कि

आयत का परिमाप = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई

अर्थात् आयत का परिमाप = $2 \times$ (लंबाई + चौड़ाई)

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित आयतों के परिमाप ज्ञात कीजिए :

आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग द्वारा परिमाप	परिमाप सूत्र द्वारा $2 \times$ (लंबाई + चौड़ाई)
25 सेमी	12 सेमी	= 25 सेमी + 12 सेमी + 25 सेमी + 12 सेमी = 74 सेमी	$= 2 \times$(25 सेमी + 12 सेमी) $= 2 \times$ (37 सेमी) = 74 सेमी
0.5 मी	0.25 मी		
18 सेमी	15 सेमी		
10.5 सेमी	8.5 सेमी		

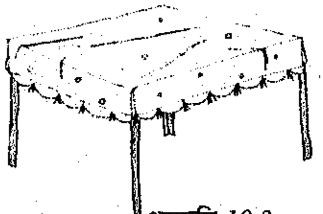
आइए अब हम इस विषय या संकल्पना को प्रयोगात्मक रूप में देखते हैं।

उदाहरण 1 : शबाना 3 मी लंबाई और 2 मी चौड़ाई के एक आयताकार टेबल कवर (आकृति 10.3) के चारों ओर एक किनारी (गोटा) लगाना चाहती है। शबाना को कितनी लंबी किनारी की आवश्यकता होगी।

हल : आयताकार टेबल कवर की लंबाई = 3 मी

आयताकार टेबल कवर की चौड़ाई = 2 मी

शबाना टेबल कवर के चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। इसीलिए आवश्यक किनारी की लंबाई, आयताकार टेबल कवर के परिमाप के बराबर होगी।


आकृति 10.3

अब आयताकार टेबल कवर का परिमाप
= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)
= 2 × (3 मी + 2 मी)
= 2 × 5 मी = 10 मी

अतः आवश्यक किनारी की लंबाई 10 मी है।

हरण 2 : एक धावक 50 मी लंबाई तथा 25 मी चौड़ाई के एक आयताकार पार्क के चारों तरफ 10 चक्कर लगाता है। उसके द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

आयताकार पार्क की लंबाई = 50 मी
आयताकार पार्क की चौड़ाई = 25 मी

धावक द्वारा एक चक्कर में तय की गई कुल दूरी, पार्क के परिमाप के बराबर होगी।

अब, आयताकार पार्क का परिमाप
= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)
= 2 × (50 मी + 25 मी)
= 2 × 75 मी = 150 मी

धावक द्वारा 1 चक्कर में तय की गई दूरी 150 मी है।

इसलिए, 10 चक्कर में तय की गई दूरी = 10 × 150 मी
= 1500 मी

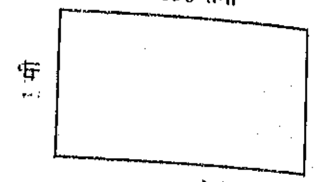
अतः धावक द्वारा तय की गई कुल दूरी 1500 मी है।

हरण 3 : एक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 150 सेमी तथा 1 मी हैं।

हल : आयत की लंबाई = 150 सेमी

आयत की चौड़ाई = 1 मी

= 100 सेमी



आयत का परिमाप

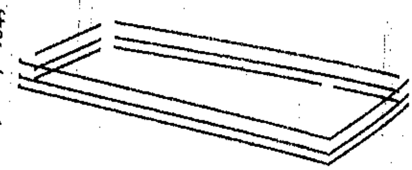
= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 × (150 सेमी + 100 सेमी)

= 2 × (250 सेमी)

= 500 सेमी = 5 मी

उदाहरण 4 : एक किसान के आयताकार खेत की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमश: 240 मी तथा 180 मी हैं। वह खेत के चारों तरफ रस्से के द्वारा 3 पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है, जैसा आकृति 10.4 में दिखाया गया है। उसके द्वारा प्रयोग किए गए रस्से की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.4

हल : किसान को रस्से के द्वारा खेत के परिमाप को 3 गुना पूरा तय करना है। इसलिए, आवश्यक रस्से की लंबाई, खेत के परिमाप की तिगुनी होगी।

खेत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

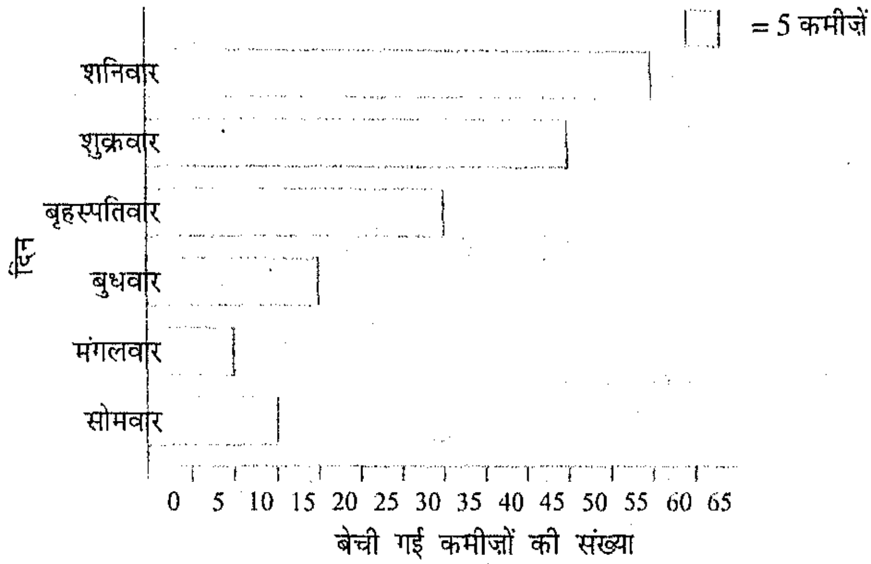
= 2 × (240 मी + 180 मी)

= 2 × 420 मी = 840 मी

रस्से की कुल लंबाई की आवश्यकता हुई = 3 × 840 मी = 2520 मी

उदाहरण 5 : 250 मी लंबाई और 175 मी चौड़ाई वाले आयताकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय 12 रु प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

2. इस दंड आलेख को देखिए जो एक रेडीमेड कपड़ों की दुकान में सोमवार से शनिवार तक हुई कमीज़ों की बिक्री को दर्शाता है।



अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) उपरोक्त दंड आलेख में क्या सूचना दर्शाई गई है?

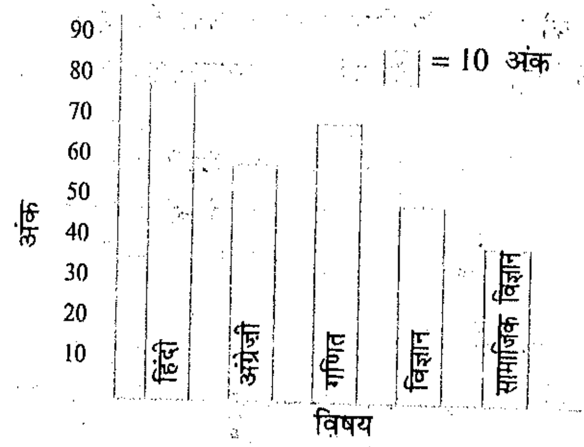
(b) कमीज़ों की संख्या को निरूपित करने के लिए क्षैतिज रेखा पर क्या पैमाना लिया गया है?

(c) किस दिन अधिकतम कमीज़ें बेची गईं और कितनी संख्या में कमीज़ें बेची गईं, लिखें?

(d) किस दिन न्यूनतम संख्या में कमीज़ें बेची गईं?

(e) बृहस्पतिवार को कितनी कमीज़ें बेची गईं?

3. इस दंड आलेख को देखिए जो अज़ीज द्वारा अर्धवार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्राप्त किए गए अंकों को प्रदर्शित करता है।



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

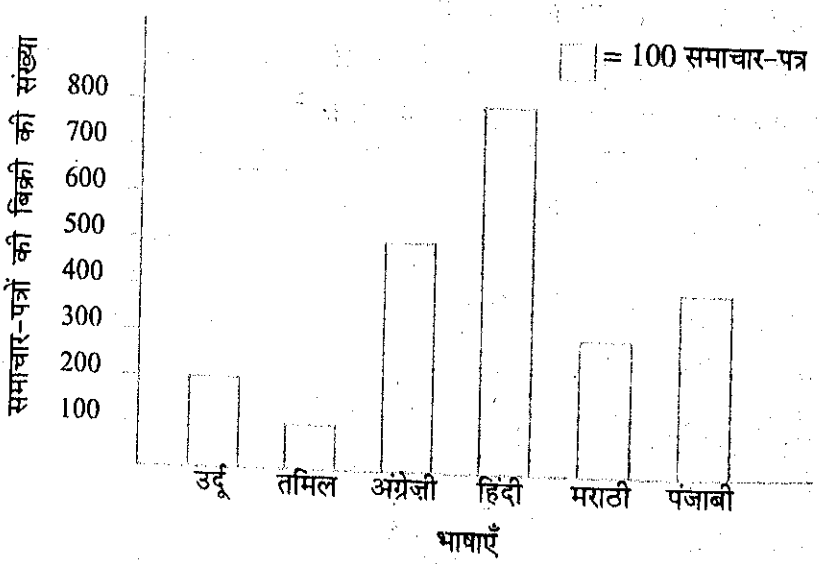
(a) यह दंड आलेख क्या सूचना प्रदर्शित करता है?

(b) किस विषय में अज़ीज ने अधिकतम अंक प्राप्त किए?

(c) किस विषय में उसने न्यूनतम अंक प्राप्त किए?

(d) विषयों के नाम लिखिए और उनमें से प्रत्येक में प्राप्त किए गए अंक भी लिखिए।

4. निम्नलिखित दंड आलेख एक शहर में छः भाषाओं में दैनिक समाचार-पत्रों की बिक्री की संख्या दर्शाता है :



इस दंड आलेख को पढ़िए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) हिंदी, पंजाबी, उर्दू, मराठी और तमिल में समाचार-पत्रों की बिक्री की संख्या ज्ञात कीजिए।

(b) किस भाषा में सबसे कम समाचार-पत्रों की बिक्री है?

(c) हिंदी और अंग्रेज़ी में पढ़े जाने वाले समाचार पत्रों की संख्या का अंतर ज्ञात कीजिए।

(d) विभिन्न भाषाओं में पढ़े जाने वाले समाचार-पत्रों की संख्याओं को आरोही-क्रम में लिखिए।

9.7.2 दंड आलेख का खींचना

उस उदाहरण को याद कीजिए जिसमें रोनाल्ड ने अपने सहपाठियों द्वारा पसंद किए जाने वाले फलों के लिए सारणी बनाई थी।

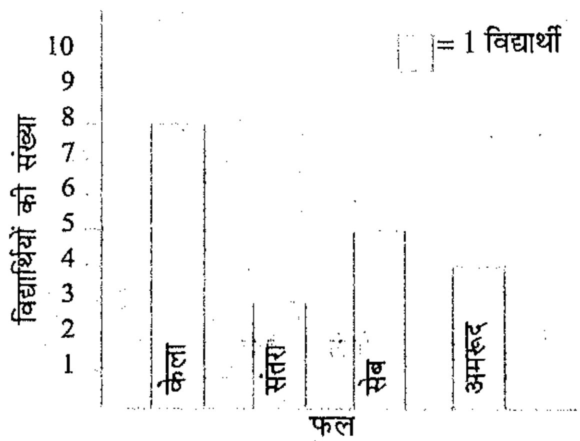
फल का नाम	केला	संतरा	सेब	अमरूद
विद्यार्थियों की संख्या	8	3	5	4

पहले एक क्षैतिज और एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचिए। क्षैतिज रेखा पर फलों को निरूपित करने वाले दंड खींचिए और ऊर्ध्वाधर रेखा पर संख्यांक लिखिए जो विद्यार्थियों की संख्या निरूपित करते हैं।

आइए एक आसान-सा पैमाना चुनें। इसका अर्थ है कि हम यह चुनेंगे कि 1 इकाई लंबाई द्वारा कितने विद्यार्थी निरूपित होंगे।

यहाँ हम 1 इकाई लंबाई = 1 विद्यार्थी लेते हैं।

हमें नीचे दर्शाया गया दंड आलेख प्राप्त होता है :



उदाहरण 11 : निम्नलिखित सारणी इमरान के परिवार की विभिन्न मदों में होने वाले मासिक व्यय को निरूपित करती है :

मद	व्यय (रु. में)
मकान किराया	3000
भोजन	3400
शिक्षा	800
बिजली	400
परिवहन	600
विविध	1200

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में निरूपित करने के चरण निम्न हैं :

(a) परस्पर दो लंब रेखाएँ खींचिए, एक ऊर्ध्वाधर और एक क्षैतिज।

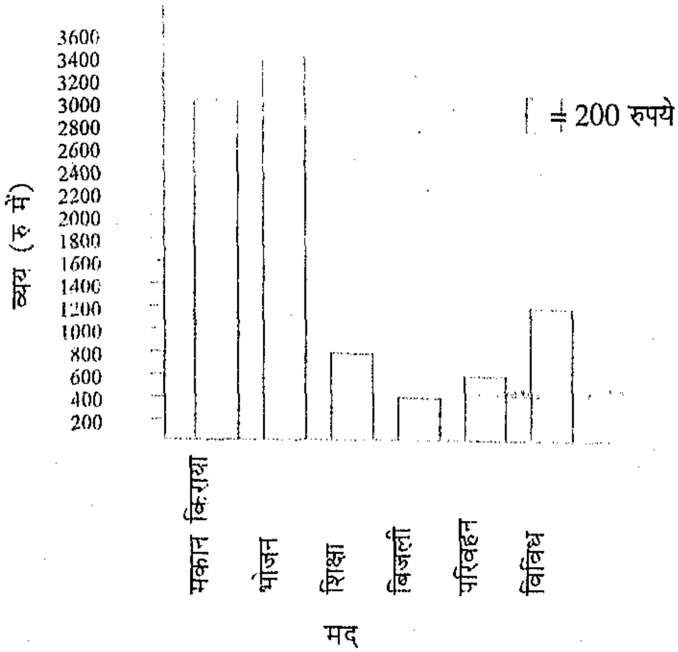
(b) क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'मद' अंकित कीजिए और ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय (रु में) अंकित कीजिए।

(c) समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड बनाइए।

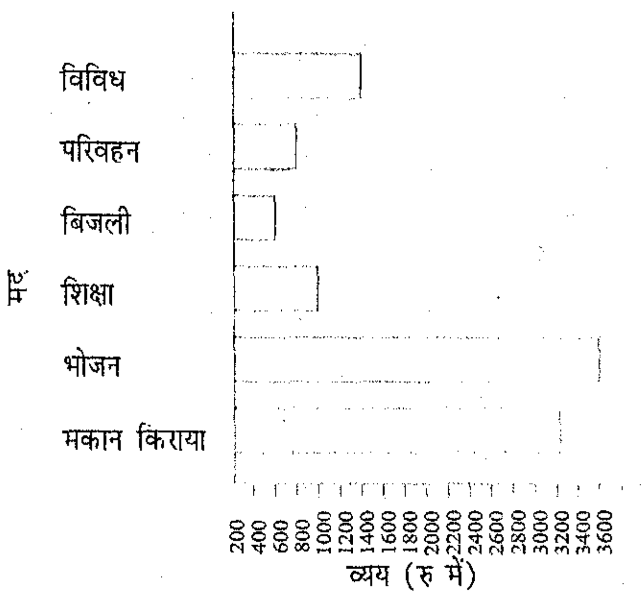
(d) ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लीजिए। मान लीजिए 1 इकाई लंबाई = 200 रु है और इसके अनुसार संगतमान अंकित कीजिए।

विभिन्न मदों के लिए, दंडों की लंबाई परिकल्पित कीजिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

मकान किराया	:	3000 ÷ 200	=	15 इकाई
भोजन	:	3400 ÷ 200	=	17 इकाई
शिक्षा	:	800 ÷ 200	=	4 इकाई
बिजली	:	400 ÷ 200	=	2 इकाई
परिवहन	:	600 ÷ 200	=	3 इकाई
विविध	:	1200 ÷ 200	=	6 इकाई



इन्हीं आँकड़ों को, 'मद' और 'व्यय' की स्थितियों को अक्षों पर परस्पर बदलकर, निम्न प्रकार भी दर्शाया जा सकता है :



इन्हें कीजिए

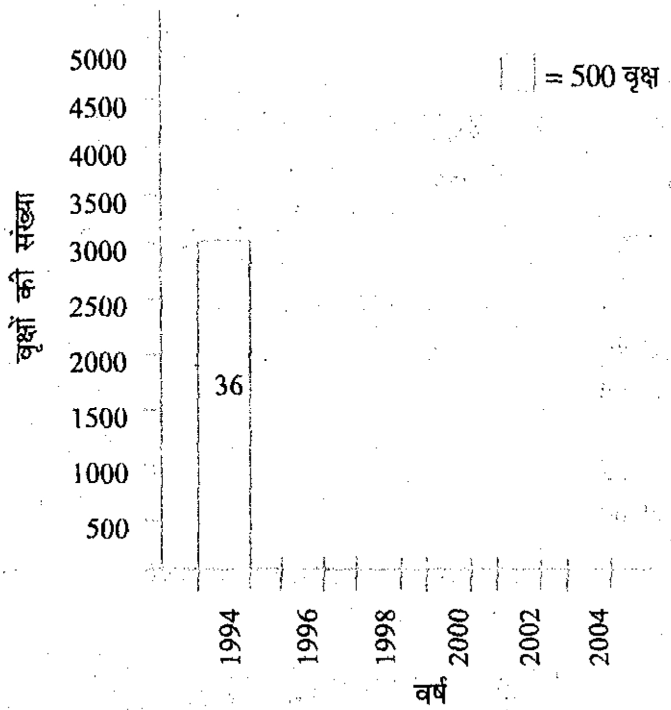
निम्नलिखित सारणी किसी शहर में वर्ष 1994–2004 के अंतराल में प्रत्येक दो वर्षों के बाद लगाए गए वृक्षों की संख्या दर्शाती है :

वर्ष		लगाए गए वृक्षों की संख्या
1994	-	3000
1996	-	2000
1998	-	4000
2000	-	5000
2002	-	6000
2004	-	3000

1 इकाई लंबाई = 500 वृक्ष लेकर, इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में व्यक्त कीजिए।

क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'वर्ष' अंकित कीजिए और ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश 'वृक्षों की संख्या' को अंकित कीजिए। अब दंडों की लंबाइयों (ऊँचाइयाँ) ज्ञात कीजिए।

1994	-	3000 ÷ 500	=	6 इकाई
1996	-	2000 ÷ 500	=	4 इकाई
1998	-	4000 ÷ 500	=	....
2000	-	5000 ÷ 500	=	....
2002	-	....	=	....
2004	-	....	=	....



उपरोक्त दंड आलेख के शेष दंडों को खींचकर पूरा कीजिए। इस दंड आलेख से (i) वह वर्ष ज्ञात कीजिए जिसमें लगाए गए वृक्षों की संख्या अधिकतम थी और (ii) वह वर्ष ज्ञात कीजिए जिसमें लगाए गए वृक्षों की संख्या न्यूनतम थी।

इन्हें कीजिए

1. किसी दुकानदार द्वारा छः क्रमागत दिनों में बेची गईं गणित की पुस्तकों की संख्या नीचे दर्शाई गई है :

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार
बेची गई पुस्तकों की संख्या	65	40	30	50	20	70

अपनी पसंद के अनुसार एक पैमाना चुनकर, उपरोक्त सूचना को एक दंड आलेख से निरूपित कीजिए।

2. अपने मित्रों के साथ पाँच और ऐसी स्थितियों के बारे में सोचिए, जहाँ हम आँकड़े प्राप्त कर सकते हैं। संख्याओं का प्रयोग करके सारणियाँ बनाइए और उन्हें दंड आलेखों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

प्रश्नावली 9.4

1. एक स्कूल के 120 विद्यार्थियों का इस आशय से सर्वेक्षण किया गया कि वे अपने खाली समय में किस क्रियाकलाप को पसंद करते हैं। निम्न आँकड़े प्राप्त हुए :

पसंद का क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	45
कहानी की पुस्तक पढ़ना	30
टी.वी. देखना	20
संगीत सुनना	10
पेंटिंग	15

1 इकाई लंबाई = 5 विद्यार्थी का पैमाना लेकर, एक दंड आलेख बनाइए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप अधिकांश विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया जाता है?

2. वर्ष 1998 से 2002 के बीच एक फैक्टरी द्वारा निर्मित साइकिलों की संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा दर्शाई गई है :

वर्ष	निर्मित साइकिलों की संख्या
1998	800
1999	600
2000	900
2001	1100
2002	1200

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए। अपनी पसंद का पैमाना चुनिए।

(a) किस वर्ष में अधिकतम संख्या में साइकिल निर्मित की गईं?

(b) किस वर्ष में न्यूनतम संख्या में साइकिल निर्मित की गईं?

3. किसी शहर के व्यक्तियों की संख्या विभिन्न आयु समूहों के अनुसार नीचे दी सारणी में दी हुई है :

आयु समूह (वर्षों में)	1-14	15-29	30-44	45-59	60-74	75 और उससे ऊपर
व्यक्तियों की संख्या	2 लाख	1 लाख 60 हज़ार	1 लाख 20 हज़ार	1 लाख 20 हज़ार	80 हज़ार	40 हज़ार

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए। (1 इकाई लंबाई = 1 हज़ार लीजिए)

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किन दो आयु समूहों में जनसंख्या बराबर है?

(b) 60 वर्ष और उससे अधिक आयु के सभी व्यक्ति वरिष्ठ नागरिक कहलाते हैं। इस शहर में कितने वरिष्ठ नागरिक हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने देखा कि आँकड़े कुछ सूचना देने के लिए एकत्रित की गई संख्याओं के संग्रह होते हैं।

2. दिए हुए आँकड़ों से कोई विशेष सूचना तुरंत प्राप्त करने के लिए, उन्हें मिलान चिह्नों का प्रयोग करके सारणियों में प्रकट (प्रस्तुत) किया जा सकता है।

3. हमने सीखा कि किस प्रकार चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। हमने चित्रालेखों की व्याख्या करना भी सीखा और उनसे संबंधित प्रश्नों के उत्तर देना भी सीखा है। हमने कुछ वस्तुओं के संकेतों से निरूपित करके चित्रालेखों को खींचना भी सीखा है। उदाहरणार्थ  = 100 पुस्तकें लेकर।

4. हमने चर्चा की है कि आँकड़ों को एक दंड आरेख या एक दंड आलेख द्वारा कैसे निरूपित किया जाता है। एक दंड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से खींचे जाते हैं। प्रत्येक दंड की लंबाई वाँछित सूचना दर्शाती है।

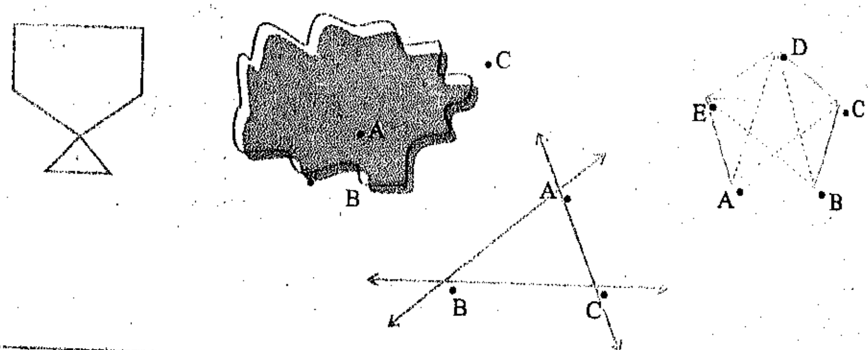
5. ऐसा करने के लिए, हमने आलेख के लिए एक पैमाना चुनने की प्रक्रिया की भी चर्चा की है। उदाहरणार्थ, 1 इकाई = 100 विद्यार्थी। हमने दंड आलेखों को पढ़ने का अभ्यास भी किया है। हमने इसकी व्याख्या करना भी सीखा है।

अध्याय 10

क्षेत्रमिति

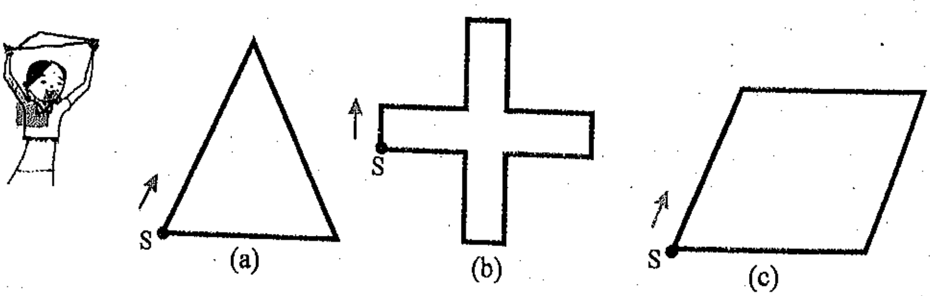
10.1 भूमिका

जब हम तल की आकृतियों के बारे में बात करते हैं तो हम उन आकृतियों के क्षेत्र तथा परिसीमा के बारे में भी विचार करते हैं। हमें इन आकृतियों की तुलना के लिए कुछ मापों की आवश्यकता होती है। आइए हम कुछ ऐसी ही आकृतियों को देखते हैं।



10.2 परिमाप

आइए नीचे दी गई आकृति 10.1 को देखते हैं। आप इन आकृतियों को एक तार अथवा धागे की सहायता से भी बना सकते हैं।



आकृति 10.1

यदि आप बिंदु S से आरम्भ करके रेखाखंडों के साथ-साथ (अनुदिश) चलते हैं तो आप पुनः बिंदु S पर पहुँच जाते हैं। इस प्रकार आपने आकार (आकृति) के चारों तरफ अथवा किनारे-किनारे का एक पूरा चक्कर लगाया। यह तय की गई दूरी इन आकृतियों को बनाने में लगे तार की लंबाई के बराबर है।

यह दूरी बंद आकृतियों का परिमाप कहलाती है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि इन आकृतियों को बनाने में लगे तार की लंबाई ही परिमाप है।

हमारे दैनिक जीवन में परिमाप की संकल्पना का बहुतायत प्रयोग होता है जैसे :

- एक किसान जो अपने खेत के चारों तरफ बाड़ लगाना चाहता है।
- एक इंजीनियर जो अपने घर के चारों तरफ एक चारदीवारी बनाने की योजना तैयार करता है।
- एक व्यक्ति जो खेल कराने के लिए एक पथ तैयार करता है।

ये सभी व्यक्ति 'परिमाप' की संकल्पना का प्रयोग करते हैं।

ऐसी पाँच स्थितियों का उदाहरण दीजिए जहाँ पर आपको परिमाप को जानने की आवश्यकता होती है।

अतः परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखाखंडों के साथ-साथ चलते हुए एक बंद आकृति बनाती है, जब आप उस आकृति के चारों तरफ एक पूरा चक्कर लगाते हैं।

प्रयास कीजिए

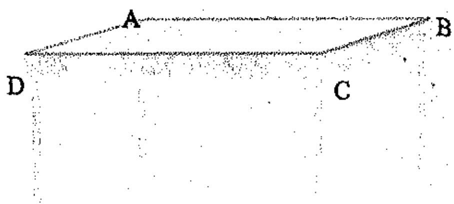
1. अपनी अध्ययन टेबल के ऊपरी चारों सिरों की लंबाइयों को मापिए तथा उन्हें लिखिए।

   AB = _____ सेमी

   BC = _____ सेमी

   CD = _____ सेमी

   DA = _____ सेमी



   अब चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

$= AB + BC + CD + DA$

= ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी

= _____ सेमी

क्या आप बता सकते हैं कि परिमाप कितना है?

2. अपनी नोटबुक के एक पृष्ठ की चारों भुजाओं की लंबाइयों को मापिए और उन्हें लिखिए।

चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

$= AB + BC + CD + DA =$ ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी

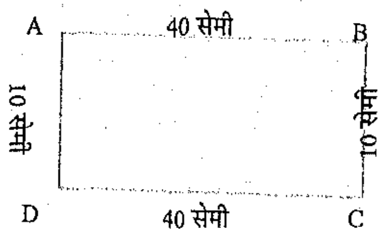
= _____ सेमी

पृष्ठ का परिमाप कितना है?

3. मीरा 150 मी लंबाई तथा 80 मी चौड़ाई वाले एक पार्क में जाती है। वह इस पार्क का पूरा एक चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की दूरी ज्ञात कीजिए।

निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए :

(a)

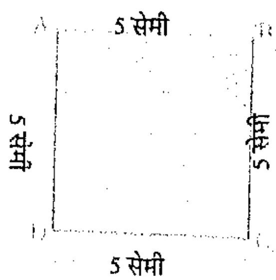


परिमाप $= AB + BC + CD + DA$

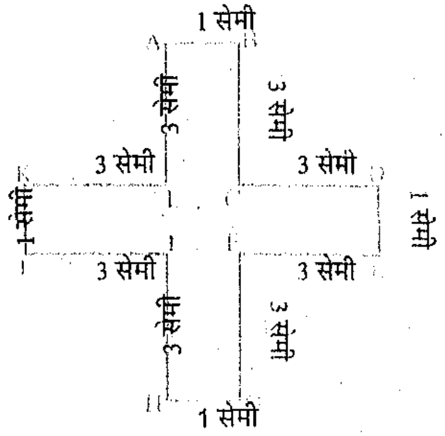
= __ + __ + __ + __

= ___

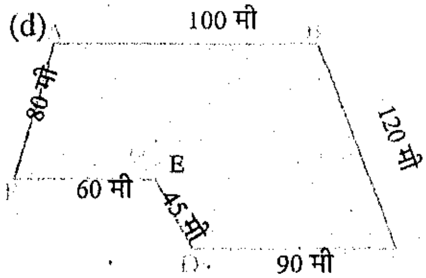
(b)



परिमाप =

(c) 

परिमाप =

(d) 

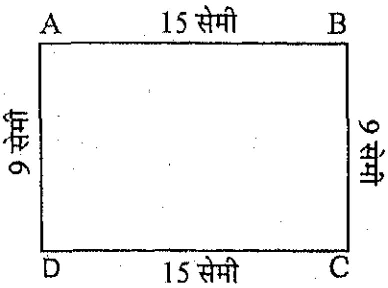
परिमाप =
AB + BC + CD + DE + EF + FA
= __ + __ + __ + __ + __ + __
= ______

इस प्रकार, आप रेखाखंडों के द्वारा निर्मित बंद आकृति का परिमाप कैसे निकालेंगे? साधारणतया, सभी भुजाओं की लंबाइयों का योगफल ज्ञात करके (जो कि रेखाखंड हैं)।

10.2.1 आयत का परिमाप

आइए अब हम एक आयत ABCD (आकृति 10.2) पर विचार करते हैं जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 15 सेमी तथा 9 सेमी हैं। आयत का परिमाप कितना होगा?

आयत का परिमाप = चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल



आकृति 10.2

$= AB + BC + CD + DA$

$= AB + BC + AB + BC$

$= 2 \times AB + 2 \times BC$

$= 2 \times (AB + BC)$

= 2 × (15 सेमी + 9 सेमी)

= 2 × (24 सेमी)

= 48 सेमी

याद रखिए आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती है। इसीलिए
$AB = CD$
$DA = BC$



अतः ऊपर दिए हुए उदाहरण में, हमने देखा कि

आयत का परिमाप = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई

अर्थात् आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित आयतों के परिमाप ज्ञात कीजिए :

आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग द्वारा परिमाप	परिमाप सूत्र द्वारा 2 × (लंबाई + चौड़ाई)
25 सेमी	12 सेमी	= 25 सेमी + 12 सेमी + 25 सेमी + 12 सेमी = 74 सेमी	= 2 ×(25 सेमी + 12 सेमी) = 2 × (37 सेमी) = 74 सेमी
0.5 मी	0.25 मी		
18 सेमी	15 सेमी		
10.5 सेमी	8.5 सेमी		

आइए अब हम इस विषय या संकल्पना को प्रयोगात्मक रूप में देखते हैं।

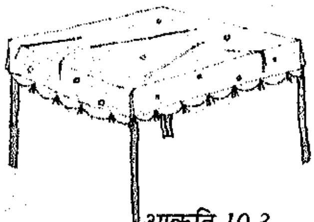
उदाहरण 1 : शबाना 3 मी लंबाई और 2 मी चौड़ाई के एक आयताकार टेबल कवर (आकृति 10.3) के चारों और एक किनारी (गोटा) लगाना चाहती है। शबाना को कितनी लंबी किनारी की आवश्यकता होगी।

हल : आयताकार टेबल कवर की लंबाई = 3 मी

आयताकार टेबल कवर की चौड़ाई = 2 मी

शबाना टेबल कवर के चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। इसीलिए आवश्यक किनारी की लंबाई, आयताकार टेबल कवर के परिमाप के बराबर होगी।

अब आयताकार टेबल कवर का परिमाप



आकृति 10.3

= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 × (3 मी + 2 मी)

= 2 × 5 मी = 10 मी

अतः आवश्यक किनारी की लंबाई 10 मी है।

उदाहरण 2 : एक धावक 50 मी लंबाई तथा 25 मी चौड़ाई के एक आयताकार पार्क के चारों तरफ 10 चक्कर लगाता है। उसके द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार पार्क की लंबाई = 50 मी

आयताकार पार्क की चौड़ाई = 25 मी

धावक द्वारा एक चक्कर में तय की गई कुल दूरी, पार्क के परिमाप के बराबर होगी।

अब, आयताकार पार्क का परिमाप

= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 × (50 मी + 25 मी)

= 2 × 75 मी = 150 मी

धावक द्वारा 1 चक्कर में तय की गई दूरी 150 मी है।

इसलिए, 10 चक्कर में तय की गई दूरी = 10 × 150 मी

= 1500 मी

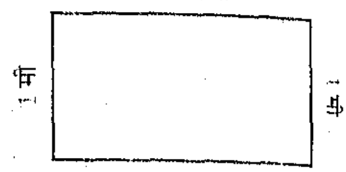
अतः धावक द्वारा तय की गई कुल दूरी 1500 मी है।

उदाहरण 3 : एक आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 150 सेमी तथा 1 मी हैं।

हल : आयत की लंबाई = 150 सेमी

आयत की चौड़ाई = 1 मी

= 100 सेमी



आयत का परिमाप

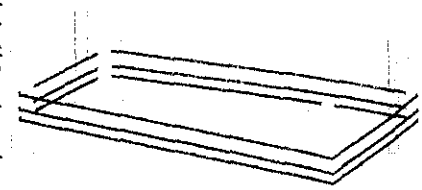
= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 × (150 सेमी + 100 सेमी)

= 2 × (250 सेमी)

= 500 सेमी = 5 मी

उदाहरण 4 : एक किसान के आयताकार खेत की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 240 मी तथा 180 मी हैं। वह खेत के चारों तरफ रस्से के द्वारा 3 पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है, जैसा आकृति 10.4 में दिखाया गया है। उसके द्वारा प्रयोग किए गए रस्से की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.4

हल : किसान को रस्से के द्वारा खेत के परिमाप को 3 गुना पूरा तय करना है। इसलिए, आवश्यक रस्से की लंबाई, खेत के परिमाप की तिगुनी होगी।

खेत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 × (240 मी + 180 मी)

= 2 × 420 मी = 840 मी

रस्से की कुल लंबाई की आवश्यकता हुई = 3 × 840 मी = 2520 मी

उदाहरण 5 : 250 मी लंबाई और 175 मी चौड़ाई वाले आयताकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय 12 रु प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

हल :आयताकार बगीचे की लंबाई = 250 मी

आयताकार बगीचे की चौड़ाई = 175 मी

बाड़ लगाने पर व्यय ज्ञात करने के लिए हमें बगीचे के परिमाप की आवश्यकता होती है।

आयताकार बगीचे का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 × (250 मी + 175 मी)

= 2 × (425 मी) = 850 मी

बगीचे के चारों ओर 1 मी लंबी बाड़ लगाने पर व्यय = 12 रु

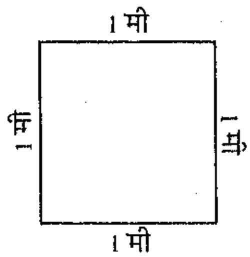
अत: बगीचे के चारों ओर 850 मी लंबी बाड़ लगाने पर कुल व्यय

= 12 × 850 रु = 10200 रु

10.2.2 सम आकृतियों का परिमाप

आइए इस उदाहरण को देखते हैं ;

विस्वामित्र 1 मी भुजा वाले वर्गाकार चित्र के चारों ओर एक रंगीन टेप लगाना चाहता है, जैसा कि आकृति 10.5 में दिखाया गया है। उसे कितनी लंबी रंगीन टेप की आवश्यकता होगी?



आकृति 10.5

चूँकि विस्वामित्र वर्गाकार चित्र के चारों ओर रंगीन टेप लगाना चाहता है, इसलिए उसे वर्गाकार चित्र के परिमाप को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

इसलिए, आवश्यक टेप की लंबाई

= वर्गाकार चित्र का परिमाप = 1 मी + 1 मी + 1 मी + 1 मी = 4 मी

हम जानते हैं कि वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाई बराबर होती है। इसलिए, इसे चार बार जोड़ने के स्थान पर, हम वर्ग की एक भुजा की लंबाई को 4 से गुणा कर सकते हैं। इसलिए, आवश्यक टेप की लंबाई = 4 × 1 मी = 4 मी

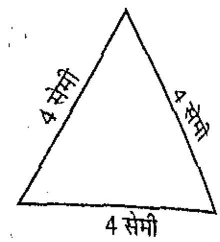
इस उदाहरण से हम देखते हैं कि

वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई

ऐसे ही कुछ और वर्गों को बनाइए और उनका परिमाप ज्ञात कीजिए।

अब हम 4 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज (आकृति 10.6) को देखते हैं।

क्या हम इसका परिमाप ज्ञात कर सकते हैं?



आकृति 10.6

इस समबाहु त्रिभुज का परिमाप = (4 + 4 + 4) सेमी

= (3 × 4) सेमी

= 12 सेमी

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × एक भुजा की लंबाई

क्या आप बता सकते हैं कि एक वर्ग तथा एक समबाहु त्रिभुज में क्या समानता है? इन आकृतियों में प्रत्येक भुजा की लंबाई बराबर है तथा प्रत्येक कोण की माप बराबर है। ऐसी सभी आकृतियाँ, बंद सम आकृतियाँ (regular closed figures) कहलाती हैं।

इसलिए एक वर्ग तथा एक समबाहु त्रिभुज सम बंद आकृतियाँ हैं।

आपने देखा कि

एक वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई

एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × एक भुजा की लंबाई

इसी प्रकार, एक सम पंचभुज का परिमाप कितना होगा?

एक सम पंचभुज में 5 बराबर भुजाएँ होती हैं।

इसलिए, एक सम पंचभुज का परिमाप = 5 × एक भुजा की लंबाई और एक सम षट्भुज का परिमाप _______ होगा।

और एक सम अष्टभुज का परिमाप क्या होगा?

प्रयास कीजिए

अपने चारों ओर ऐसी वस्तुओं का पता लगाइए जो सम आकृतियाँ हों और उनका परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

शायना 70 मी भुजा वाले वर्गाकार पार्क के किनारे-किनारे (चारों ओर) 3 चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार पार्क का परिमाप = 4 × एक भुजा की लंबाई
= 4 × 70 मी = 280 मी

एक चक्कर में तय की गई दूरी = 280 मी

इसलिए, 3 चक्करों में तय की गई दूरी = 3 × 280 मी = 840 मी

उदाहरण 7 : पिंकी 75 मी भुजा वाले वर्गाकार मैदान के किनारे-किनारे चक्कर लगाती है। बॉब एक आयताकार मैदान जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 160 मी और 105 मी हैं, के किनारे-किनारे चक्कर लगाता है। दोनों में से कौन अधिक और कितनी अधिक दूरी तय करता है।

हल : पिंकी द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी = वर्ग का परिमाप
= 4 × एक भुजा की लंबाई
= 4 × 75 मी = 300 मी

बॉब द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी = आयत का परिमाप
= 2 × (लंबाई + चौड़ाई)
= 2 × (160 मी + 105 मी)
= 2 × 265 मी = 530 मी

तय की गई दूरियों में अंतर = 530 मी – 300 मी = 230 मी

अतः बॉब अधिक दूरी तय करता है और यह दूरी 230 मी अधिक है

उदाहरण 8 : एक सम पंचभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 सेमी है।

हल : इस सम पंचभुज में 5 भुजाएँ हैं, जिसमें प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 सेमी है

सम पंचभुज का परिमाप = 5 × 3 सेमी = 15 सेमी

उदाहरण 9 : एक सम षट्भुज का परिमाप 18 सेमी है। इसकी एक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : परिमाप = 18 सेमी

एक सम षट्भुज में 6 बराबर भुजाएँ होती हैं। इसलिए, एक भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए, हम परिमाप को 6 से भाग दे सकते हैं।

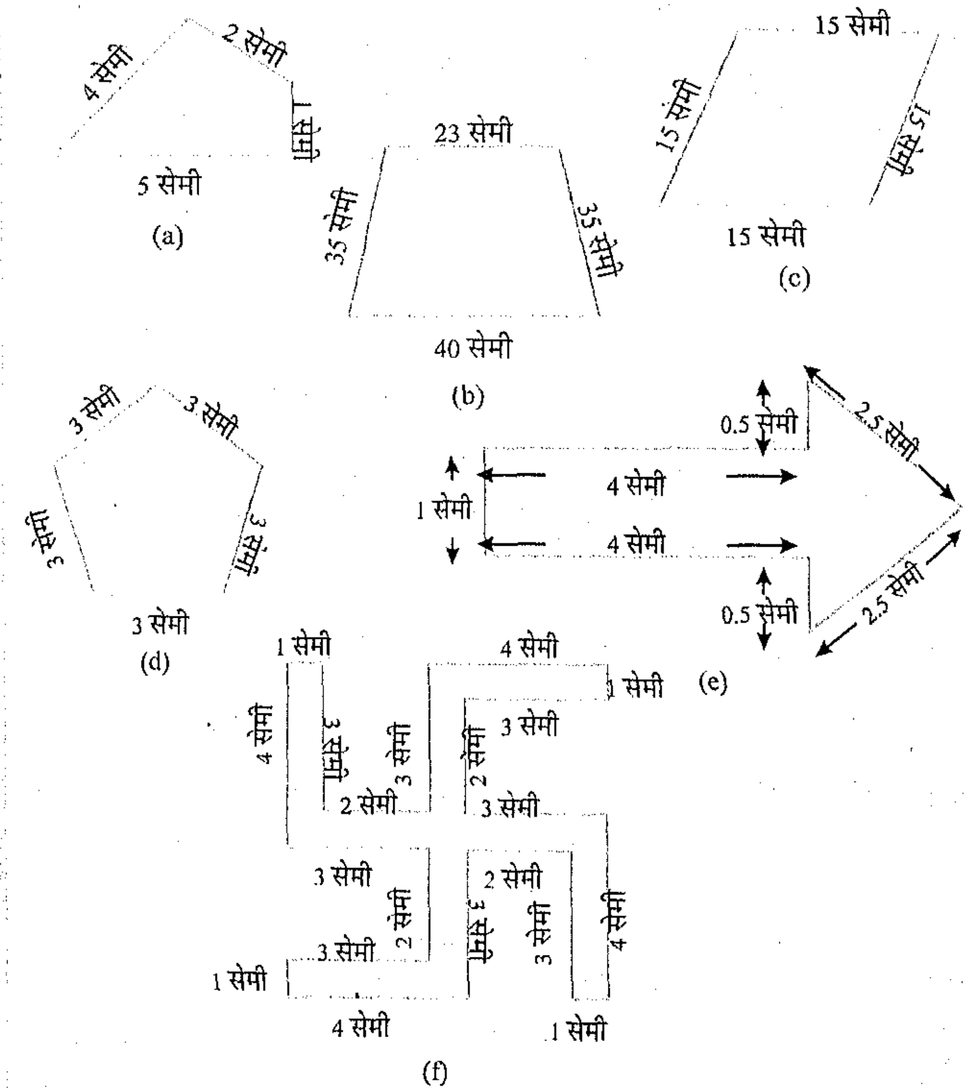
सम षट्भुज की एक भुजा की लंबाई = 18 सेमी ÷ 6 = 3 सेमी

अत: सम षट्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 सेमी है।

अब हम कुछ ऐसे प्रश्नों को हल करेंगे जो कि अभी तक प्राप्त की गई जानकारी पर आधारित हैं।

प्रश्नावली 10.1

1. नीचे दी हुई आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए :



2. 40 सेमी लंबाई और 10 सेमी चौड़ाई वाले एक आयताकार बॉक्स के ढक्कन को चारों ओर से पूरी तरह एक टेप द्वारा बंद कर दिया जाता है। आवश्यक टेप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. एक मेज की ऊपरी सतह की विमाएँ 2 मी 25 सेमी और 1 मी 50 सेमी हैं। मेज की ऊपरी सतह का परिमाप ज्ञात कीजिए।

4. 32 सेमी लंबाई और 21 सेमी चौड़ाई वाले एक फोटो को लकड़ी की पट्टी से फ्रेम करना है। आवश्यक लकड़ी की पट्टी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

5. एक आयताकार भूखंड की लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 0.7 किमी और 0.5 किमी हैं। इसके चारों ओर एक तार से 4 पंक्तियों में बाड़ लगाई जानी है। आवश्यक तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

6. निम्न आकृतियों में प्रत्येक का परिमाप ज्ञात कीजिए :

   (a) एक त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी हैं।

   (b) एक समबाहु त्रिभुज जिसकी एक भुजा की लंबाई 9 सेमी है।

   (c) एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी प्रत्येक समान भुजा 8 सेमी की हो तथा तीसरी भुजा 6 सेमी हो।

7. एक त्रिभुज का परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 10 सेमी, 14 सेमी तथा 15 सेमी हैं।

8. एक सम षट्भुज का परिमाप ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा की माप 8 मी है।

9. एक वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाप 20 मी है।

10. एक सम पंचभुज का परिमाप 100 सेमी है। प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

11. एक धागे का टुकड़ा 30 सेमी लंबाई का है। प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी, यदि धागे से बनाया जाता है :

    (a) एक वर्ग?

    (b) एक समबाहु त्रिभुज?

    (c) एक सम षट्भुज?

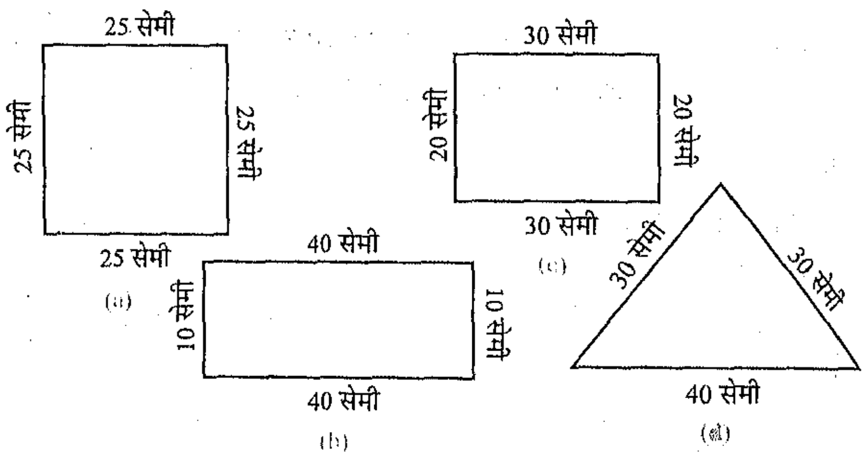
12. एक त्रिभुज की दो भुजाएँ 12 सेमी तथा 14 सेमी हैं। इस त्रिभुज का परिमाप 36 सेमी है। इसकी तीसरी भुजा की लंबाई क्या होगी?

13. 250 मी भुजा वाले वर्गाकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय 20 रु प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

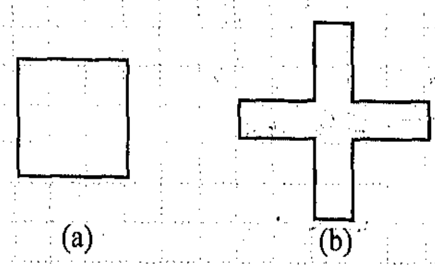
14. एक आयताकार बगीचा जिसकी लंबाई 175 मी तथा चौड़ाई 125 मी है, के चारों ओर 12 रु प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

15. स्वीटी 75 मी भुजा वाले वर्ग के चारों ओर दौड़ती है और बुलबुल 60 मी लंबाई और 45 मी चौड़ाई वाले आयत के चारों ओर दौड़ती है। कौन कम दूरी तय करती है?

16. निम्न प्रत्येक आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए। आप उत्तर से क्या निष्कर्ष निकालते हैं?



17. अवनीत 9 वर्गाकार टाइल खरीदता है, जिसकी प्रत्येक भुजा $\frac{1}{2}$ मी है और वह इन टाइलों को एक वर्ग के रूप में रखता है।



आकृति 10.7

(a) नए वर्ग का परिमाप क्या है [(आकृति 10.7 (a)]?

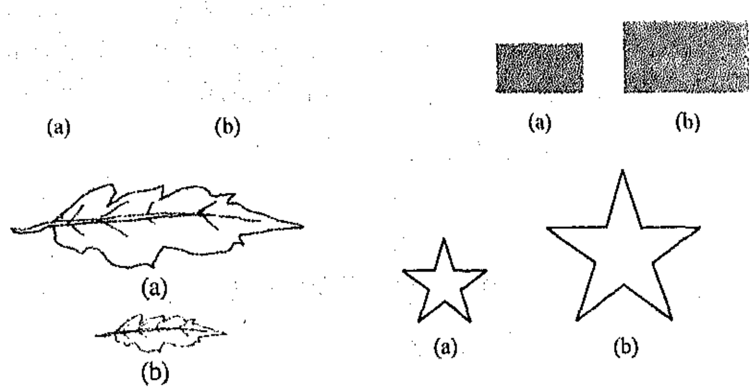
(b) शैरी को उसके द्वारा टाइलों को रखने की व्यवस्था पसन्द नहीं आती है। वह इन टाइलों को एक क्रॉस के रूप में रखवाती है। इस व्यवस्था का परिमाप कितना होगा [(आकृति 10.7 (b)]?

(c) किसका परिमाप अधिक है?

(d) अवनीत सोचता है, क्या कोई ऐसा भी तरीका है जिससे इनसे भी बड़ा परिमाप प्राप्त किया जा सकता हो? क्या आप ऐसा करने का कोई सुझाव दे सकते हैं? (टाइलें किनारों से आपस में मिली हुई हों और वे टूटी न हो)।

10.3 क्षेत्रफल

नीचे दी गई बंद आकृतियों को देखिए (आकृति 10.8)। ये सभी आकृतियाँ तल में कुछ क्षेत्र को घेरती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनमे से कौन सी आकृति ज़्यादा क्षेत्र घेरती है?



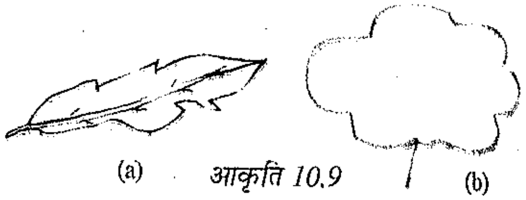
आकृति 10.8

बंद आकृतियों द्वारा घेरे गए तल के परिमाण को उसका **क्षेत्रफल** कहते हैं। इसलिए, क्या आप बता सकते हैं कि ऊपर दी गई आकृतियों में किसका क्षेत्रफल अधिक है?

अब हम नीचे दी गई आकृतियों को देखते हैं (आकृति 10.9)। इनमें से किस

आकृति का क्षेत्रफल अधिक है? इन आकृतियों को देखने मात्र से यह बता पाना बहुत ही मुश्किल है। इसलिए, आप क्या करते हैं?

इन्हें एक वर्गांकित पेपर या ग्राफ पेपर पर रखिए जहाँ पर प्रत्येक वर्ग की माप 1 सेमी × 1 सेमी हो।


(a) *आकृति 10.9* (b)

इन आकृतियों की बाहरी सीमा अर्थात् बाहरी रूपरेखा खींचिए। इस आकृति के द्वारा घेरे गए वर्गों को देखिए। आप देखेंगे कि उनमें कुछ पूरे वर्ग, कुछ आधे वर्ग, कुछ आधे से कम तथा कुछ आधे से अधिक वर्ग घिरे हुए हैं।

आकृति द्वारा घेरे गए आवश्यक सेमी वर्ग की संख्या ही उसका क्षेत्रफल है।

परन्तु यहाँ एक समस्या है : आप जिस भी किसी आकृति का क्षेत्रफल मापना या जानना चाहते हैं, वर्ग हमेशा उसे पूर्णतया नहीं ढकते हैं। हम इस समस्या का समाधान एक परिपाटी को अपनाकर कर सकते हैं।

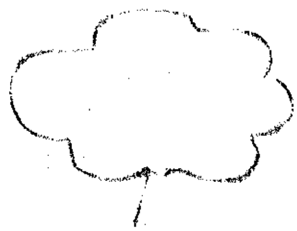
- एक पूरे वर्ग के क्षेत्रफल को हम 1 वर्ग इकाई (मात्रक) लेते हैं। यदि ये वर्ग एक वर्ग सेंटीमीटर के हैं तब एक पूरे वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग सेमी होगा।
- जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति से घिरा है, उन पर ध्यान मत दीजिए अर्थात् उन्हें छोड़ दीजिए।
- यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्ग को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।
- यदि किसी वर्ग का ठीक-ठीक आधा भाग गिनती में आता है, तो ऐसे वर्ग के क्षेत्रफल को $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लेते हैं।

इस परिपाटी से इच्छित क्षेत्रफल का अनुमान अच्छी तरह लगाया जा सकता है।

[illegible] वर्गों को गिनकर, आकृति 10.9 (b) का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ग्राफ पेपर पर इस आकृति की बाहरी रूपरेखा खींचिए। वर्ग इस आकृति को कैसे घेरते हैं (आकृति 10.10)?

घिरे हुए वर्ग	संख्या	अनुमानित क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
(i) पूरे घिरे हुए वर्ग	11	11
(ii) आधे घिरे हुए वर्ग	3	$3 \times \frac{1}{2}$
(iii) आधे से अधिक घिरे हुए वर्ग	7	7
(iv) आधे से कम घिरे हुए वर्ग	5	0



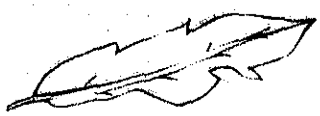
आकृति 10.10

कुल क्षेत्रफल $= 11 + 3\times\frac{1}{2} + 7 = 19\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 11 : वर्गों को गिनकर, आकृति 10.9 (a) का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : एक ग्राफ पेपर पर इस आकृति की बाहरी रूपरेखा खींचिए। वर्ग इस आकृति को कैसे घेरते हैं (आकृति 10.11)?

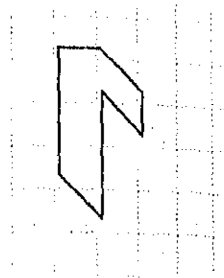
घिरे हुए वर्ग	संख्या	अनुमानित क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
(i) पूरे घिरे हुए वर्ग	1	1
(ii) आधे घिरे हुए वर्ग	-	-
(iii) आधे से अधिक घिरे हुए वर्ग	7	7
(iv) आधे से कम घिरे हुए वर्ग	9	0



आकृति 10.11

कुल क्षेत्रफल $= 1 + 7 = 8$ वर्ग इकाई

उदाहरण 12 : आकृति 10.12 में दिखाए गए आकार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.12

हल : यह आकार (आकृति) रेखाखंडों से मिलकर बना है। यह आकृति केवल पूरे वर्गों तथा आधे वर्गों से घिरी हुई है। यह हमारे कार्य को और भी आसान बनाता है, कैसे?

(i) पूरे घिरे हुए वर्गों की संख्या = 3

(ii) आधे घिरे हुए वर्गों की संख्या = 3

पूरे वर्गों द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल

$= 3 \times 1$ वर्ग इकाई = 3 वर्ग इकाई

आधे वर्गों द्वारा घिरा (ढका) हुआ क्षेत्रफल

$= 3 \times \frac{1}{2}$ वर्ग इकाई $= 1\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

अत: कुल क्षेत्रफल $= 4\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई

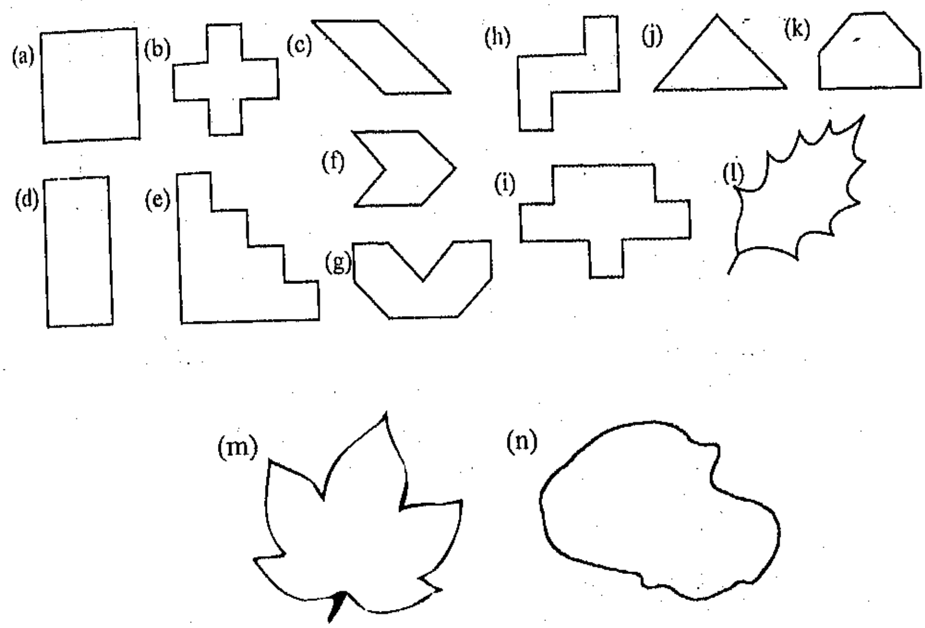
प्रयास कीजिए

1. ग्राफ पेपर पर कोई एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त में उपस्थित वर्गों की संख्या को गिनकर वृत्ताकार क्षेत्र का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. ग्राफ पेपर पर पत्तियों, फूल की पंखुड़ियों तथा ऐसे ही अन्य वस्तुओं को छायांकित कीजिए और उनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

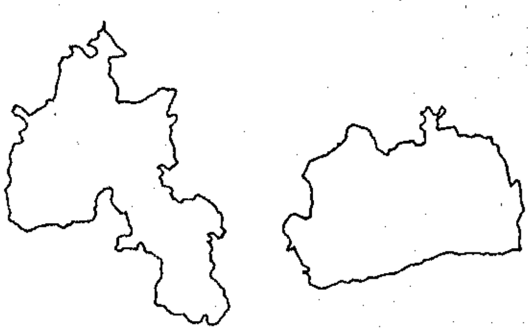


प्रश्नावली 10.2

1. निम्नलिखित आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

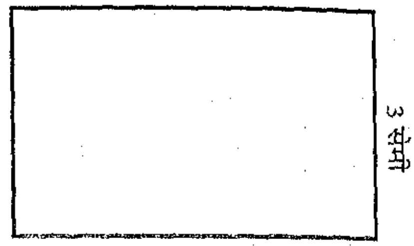


2. निम्न आकृतियों के युग्म में ट्रेसिंग पेपर (अक्स कागज़) तथा सेंटीमीटर ग्राफ पेपर की सहायता से क्षेत्रफलों की तुलना कीजिए :



10.3.1 आयत का क्षेत्रफल

एक वर्गांकित पेपर की सहायता से, क्या हम बता सकते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कितना होगा, जिसकी लंबाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी है?



आकृति 10.13

ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए जिस पर 1 सेमी × 1 सेमी के वर्ग हों (आकृति 10.13)। यह आयत 15 वर्गों को पूर्णतया ढक लेता है।

आयत का क्षेत्रफल = 15 वर्ग सेमी है, जिसे हम 5 × 3 वर्ग सेमी (लंबाई × चौड़ाई) के रूप में भी लिख सकते हैं।

कुछ आयतों की भुजाओं की माप दी गई हैं। इन्हें ग्राफ पेपर पर रखकर तथा वर्गों की संख्या को गिनकर, इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

लंबाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
3 सेमी	2 सेमी	------
5 सेमी	4 सेमी	------
6 सेमी	5 सेमी	------

इससे हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

हमने देखा कि

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

बिना ग्राफ पेपर की सहायता से, क्या हम एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं, जिसकी लंबाई 6 सेमी तथा चौड़ाई 4 सेमी है?

हाँ, यह संभव है।

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= 6 सेमी × 4 सेमी = 24 वर्ग सेमी

प्रयास कीजिए

1. अपनी कक्षा के फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. अपने घर के किसी एक दरवाज़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.3.2 वर्ग का क्षेत्रफल

आइए अब हम एक वर्ग पर विचार करते हैं जिसकी भुजा की लंबाई 4 सेमी है (आकृति 10.14)।

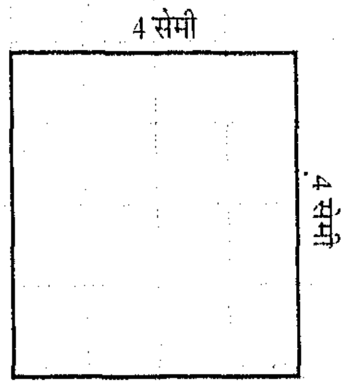
इस वर्ग का क्षेत्रफल कितना होगा?

यदि हम इसे सेंटीमीटर ग्राफ पेपर पर रखते हैं, तब हम क्या देखते हैं?

यह 16 वर्गों को पूर्णतया ढक लेता है।

इसलिए, वर्ग का क्षेत्रफल = 16 वर्ग सेमी

= 4×4 वर्ग सेमी



आकृति 10.14

कुछ वर्गों की एक भुजा की लंबाई दी गई है :

ग्राफ पेपर की सहायता से उनके क्षेत्रफलों को ज्ञात कीजिए।

एक भुजा की लंबाई	वर्ग का क्षेत्रफल
3 सेमी	----------
7 सेमी	----------
5 सेमी	----------

इससे हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं? हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में,

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा

आप प्रश्नों को हल करते समय इसका प्रयोग एक सूत्र के रूप में कर सकते हैं।

उदाहरण 13 : एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 12 सेमी तथा 4 सेमी हैं।

हल : आयत की लंबाई = 12 सेमी

आयत की चौड़ाई = 4 सेमी

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= 12 सेमी × 4 सेमी = 48 वर्ग सेमी

उदाहरण 14 : एक वर्गाकार भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी एक भुजा की लंबाई 8 मी है।

हल : वर्ग की भुजा = 8 मी

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 8 मी × 8 मी = 64 वर्ग मी

उदाहरण 15 : एक आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी तथा इसकी लंबाई 9 सेमी है। गत्ते की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल = 36 वर्ग सेमी

लंबाई = 9 सेमी

चौड़ाई = ?

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

$$\text{इसलिए,} \quad \text{चौड़ाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}} = \frac{36}{9} \text{ सेमी} = 4 \text{ सेमी}$$

अतः, आयताकार गत्ते की चौड़ाई 4 सेमी है।

उदाहरण 16 : बॉब 3 मी चौड़ाई तथा 4 मी लंबाई वाले एक कमरे में वर्गाकार टाइलें लगाना चाहता है। यदि प्रत्येक वर्गाकार टाइल की भुजा 0.5 मी हो, तो कमरे के फर्श को ढ़कने के लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

हल : कमरे में लगने वाली सभी टाइलों का कुल क्षेत्रफल, फर्श के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

कमरे की लंबाई = 4 मी

कमरे की चौड़ाई = 3 मी

फर्श का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

= 4 मी × 3 मी = 12 वर्ग मी

एक वर्गाकार टाइल का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

= 0.5 मी × 0.5 मी = 0.25 वर्ग मी

$$\text{आवश्यक कुल टाइलों की संख्या} = \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{12}{0.25} = \frac{1200}{25} = 48 \text{ टाइलें}$$

उदाहरण 17 : 1 मी 25 सेमी चौड़ाई तथा 2 मी लंबाई वाले कपड़े के एक टुकड़े का क्षेत्रफल वर्ग मीटर में ज्ञात कीजिए।

हल : कपड़े की लंबाई = 2 मी

कपड़े की चौड़ाई = 1 मी 25 सेमी = 1 मी + 0. 25 मी = 1.25 मी

(चूंकि 25 सेमी = 0.25 मी)

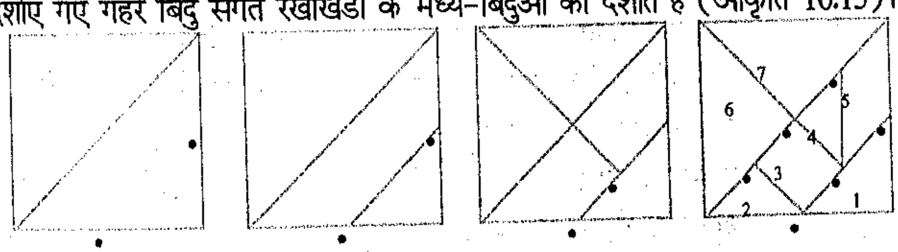
कपड़े का क्षेत्रफल = कपड़े की लंबाई × कपड़े की चौड़ाई

= 2 मी × 1.25 मी = 2.50 वर्ग मी

प्रयास कीजिए

1. 5 सेमी भुजा का एक वर्गाकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए।

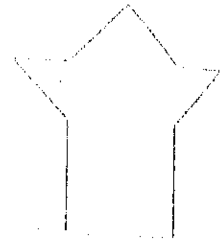
इस कागज़ के टुकड़े को 7 टुकड़ों में काटिए जैसा कि दर्शाया गया है। प्रत्येक स्थिति में, दर्शाए गए गहरे बिंदु संगत रेखाखंडों के मध्य-बिंदुओं को दर्शाते हैं (आकृति 10.15)।



आकृति 10.15

1. क्या आकार 2, 3 और 4 मिलकर आकार 6 को पूर्णतया ढ़क सकते हैं? क्या आप कोई दूसरा तरीका निकाल सकते हैं, जिससे कि कोई एक आकार उसके अन्य टुकड़ों द्वारा पूर्णतया ढका जा सकता है?
2. सभी 7 टुकड़ों को आपस में रखकर एक दूसरे को ढ़के बिना यहाँ पर एक आकार बनाया गया है (आकृति 10.16)। नये आकार का क्षेत्रफल कितना होगा?

   अब आप देखिए, क्या नीचे दिए गए पक्षियों को (आकृति 10.17) लिए गए वर्ग के सातों टुकड़ों से मिलाकर बनाया जा सकता है?



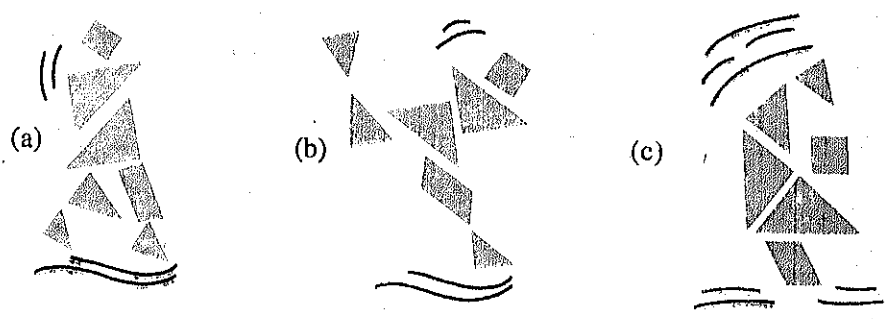
आकृति 10.16



आकृति 10.17

क्या हम कह सकते हैं कि इनका क्षेत्रफल बराबर है?

निम्न दिए गए प्रत्येक चित्र (आकृति 10.18) को इन्हीं 7 टुकड़ों का प्रयोग करके बनाया गया है लेकिन एक टुकड़े को एक चित्र में लुप्त कर दिया गया है।



आकृति 10.18

(i) कौन-सा टुकड़ा किस चित्र में से लुप्त है।

(ii) किन चित्रों का क्षेत्रफल बराबर है।

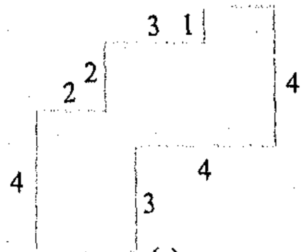
अभी तक आपने जो सीखा है उस पर आधारित कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

प्रश्नावली 10.3

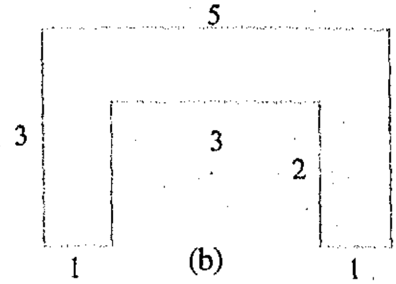
1. उन आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाएँ नीचे दी गई हैं :
   (a) 3 सेमी और 4 सेमी (b) 12 मी और 21 मी
   (c) 2 किमी और 3 किमी (d) 2 मी और 70 सेमी
2. उन वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाएँ निम्नलिखित हैं :
   (a) 10 सेमी (b) 14 सेमी (c) 5 मी
3. तीन आयतों की विमाएँ निम्नलिखित हैं :
   (a) 9 मी और 6 मी (b) 3 मी और 17 मी (c) 4 मी और 14 मी
   इनमें से किसका क्षेत्रफल सबसे अधिक है और किसका सबसे कम?
4. 50 मी लंबाई वाले एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 300 वर्ग मीटर है। बगीचे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
5. 500 मी लंबाई तथा 200 मी चौड़ाई वाले एक आयताकार भूखंड पर 8 रु प्रति 100 वर्ग मीटर की दर से टाइल लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
6. एक मेज़ की माप 2 मी 25 सेमी × 1 मी 50 सेमी हैं। मेज का क्षेत्रफल वर्ग मीटर में ज्ञात कीजिए।
7. एक कमरे की लंबाई 4 मी 25 सेमी तथा चौड़ाई 3 मी 65 सेमी है। कमरे के फर्श को ढ़कने के लिए कितने वर्ग मीटर गलीचे की आवश्यकता होगी?
8. एक फर्श की लंबाई 5 मी तथा चौड़ाई 4 मी है। 3 मी भुजा वाले एक वर्गाकार गलीचे को फर्श पर बिछाया गया है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर गलीचा नहीं बिछा है।

9. 4.8 मी लंबाई तथा 4.2 मी चौड़ाई वाले एक आयताकार भूखंड पर 1.2 मी भुजा वाली वर्गाकार फूलों की 5 क्यारियाँ बनायी जाती हैं। भूखंड के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित आकृतियों को आयतों में तोड़िए। इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (भुजाओं की माप सेमी में दी गई है)।

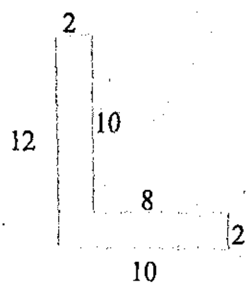


(a)

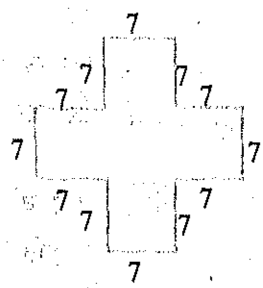


(b)

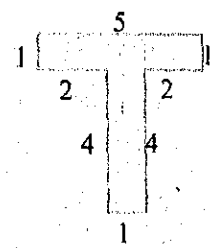
11. निम्नलिखित आकृतियों को आयतों में तोड़िए और प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (भुजाओं की माप सेमी में दी गई है)।



(a)



(b)



(c)

12. एक टाइल की माप 5 सेमी × 12 सेमी हैं। एक क्षेत्र को पूर्णतया ढकने के लिए, ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी, जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः

(a) 144 सेमी और 100 सेमी हैं।

(b) 70 सेमी और 36 सेमी हैं।

एक चुनौती !

एक सेंटीमीटर वर्गांकित पेपर पर आप जितने भी आयत बना सकते हैं बनाइए, जिससे कि आयत का क्षेत्रफल 16 वर्ग सेमी हो जाए (केवल पूर्ण संख्या की लंबाई पर ही विचार करना है)।

(a) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है?

(b) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है?

यदि आप एक ऐसा आयत लें जिसका क्षेत्रफल 24 वर्ग सेमी हो तो आपके उत्तर क्या होंगे?

दिए हुए क्षेत्रफल के लिए, क्या अधिकतम परिमाप के आयत के आकार को बताना संभव है? क्या सबसे कम परिमाप के आयत के बारे में बता सकते हैं? उदाहरण दीजिए और कारण बताइए।

हमने क्या चर्चा की?

1. परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखाखंडों के साथ-साथ चलते हुए एक बंद आकृति के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाने में तय करती है।
2. (a) आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

   (b) वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा की लंबाई

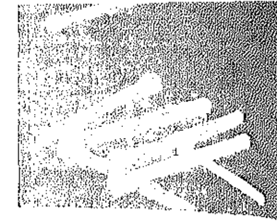
   (c) समबाहु त्रिभुज का परिमाप = 3 × भुजा की लंबाई
3. ऐसी आकृतियाँ, जिसकी सभी भुजाएँ और कोण बराबर हों, बंद सम आकृतियाँ कहलाती हैं।
4. बंद आकृतियों द्वारा घिरे गए तल के परिमाण को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।
5. वर्गांकित पेपर का प्रयोग करके किसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित परिपाटी को अपनाया जाता है :

   (a) जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति से घिरा है, उन्हें छोड़ दीजिए।

   (b) यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्गों को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।

   (c) यदि किसी वर्ग का आधा भाग आकृति से घिरा हो तो उसके क्षेत्रफल को $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लेते हैं।
6. (a) आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

   (b) वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा



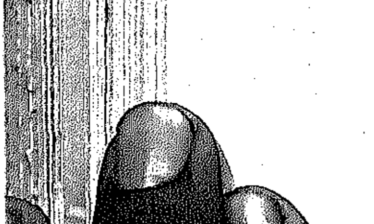
अध्याय 11

बीजगणित

भूमिका

अभी तक हमारा अध्ययन संख्याओं और आकारों के साथ रहा है। अब तक हम संख्याओं, संख्याओं पर संक्रियाओं और उनके गुणों के बारे में पढ़ चुके हैं। हमने संख्याओं को दैनिक जीवन की विभिन्न समस्याओं को हल करने में उपयोग किया है। गणित की वह शाखा जिसमें हमने संख्याओं का अध्ययन किया, **अंकगणित (arithmetic)** कहलाती है। हम दो और तीन विमाओं (dimensions) वाली आकृतियाँ तथा उनके गुणों के बारे में भी पढ़ चुके हैं। गणित की वह शाखा जिसमें हम इन आकृतियों अथवा आकारों (shapes) का अध्ययन करते हैं, **ज्यामिति (geometry)** कहलाती है। अब हम गणित की एक अन्य शाखा का अध्ययन प्रारंभ करने जा रहे हैं, जो **बीजगणित (algebra)** कहलाती है।

इस नई शाखा, जिसका अध्ययन हम प्रारंभ करने जा रहे हैं, की मुख्य विशेषता यह है कि इसमें अक्षरों का प्रयोग किया जाता है। अक्षरों के प्रयोग से, हम नियमों और सूत्रों (formulas) को व्यापक रूप में लिख पाने में समर्थ हो जाएँगे। अक्षरों के इस प्रयोग से, हम केवल एक विशेष संख्या की ही बात न करके, किसी भी संख्या की बात कर सकते हैं। दूसरी बात यह है कि अक्षर अज्ञात राशियों के स्थान पर भी प्रयोग किए जा सकते हैं। इन अज्ञात राशियों (unknowns) को निर्धारित करने की विधियों को सीखकर हम पहेलियाँ (puzzles) और दैनिक जीवन से संबंधित अनेक समस्याओं को हल करने के अनेक प्रभावशाली साधन विकसित कर सकते हैं। तीसरी बात यह है कि ये अक्षर संख्याओं के स्थान पर प्रयोग किए जाते हैं, इसलिए इन पर संख्याओं की तरह संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं। इससे हम बीजीय व्यंजकों (algebraic expressions) और उनके गुणों के अध्ययन की ओर अग्रसर होते हैं।



आप बीजगणित को रोचक और उपयोगी पाएँगे। यह समस्याओं के हल करने में अति उपयोगी रहता है। आइए अपने अध्ययन को सरल उदाहरणों द्वारा प्रारंभ करें।

11.2 माचिस की तीलियों से बने प्रतिरूप

अमीना और सरिता माचिस की तीलियों से प्रतिरूप (Pattern) बना रही हैं। उन्होंने अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों के सरल प्रतिरूप बनाने का निर्णय किया। अमीना दो तीलियाँ लेकर अक्षर L बनाती है, जैसा कि आकृति 11.1 (a) में दिखाया गया है। फिर सरिता भी दो तीलियाँ लेती है और उनसे एक अन्य L बनाकर अमीना द्वारा बनाए गए L के आगे रख देती है, जैसा कि आकृति 11.1 (b) में दिखाया गया है।



(a) (b) (c)

आकृति 11.1

फिर अमीना एक और L बनाकर आगे रख देती है और यह सिलसिला आगे जारी रहता है जैसा कि 11.1 (c) में बिंदुओं से दर्शाया गया है।

तभी उनका मित्र अप्पू आ जाता है। वह इस प्रतिरूप को देखता है। अप्पू सदैव प्रश्न पूछता रहता है। वह इन लड़कियों से पूछता है, ''सात L बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता पड़ेगी''? अमीना और सरिता सुचारू रूप से कार्य करती हैं। वे 1 L, 2 L, 3 L, इत्यादि से प्रतिरूप बनाती रहती हैं और एक सारणी बनाती हैं :

सारणी-1

बनाए गए L की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	–	–
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	–	–

अप्पु को सारणी–1 से अपना उत्तर प्राप्त हो जाता है। 7 L बनाने के लिए 14 तीलियों की आवश्यकता होगी।

सारणी में लिखते समय, अमीना यह अनुभव करती है कि आवश्यक तीलियों की संख्या बनाए गए L की संख्या की दो गुनी है। अर्थात्

आवश्यक तीलियों की संख्या = 2 × L की संख्या



आइए सुविधा के लिए, L की संख्या के लिए अक्षर n लिखें।

यदि एक L बनाया जाता है, तो $n = 1$ है; यदि 2L बनाए जाते हैं तो $n = 2$ है; इत्यादि। इस प्रकार, n कोई भी प्राकृत संख्या 1, 2, 3, 4, 5, ... हो सकती है। फिर हम लिखते हैं : आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times n$ है।



$2 \times n$ लिखने के स्थान पर, हम इसे $2n$ लिखते हैं। ध्यान दीजिए $2n$ वही है जो $2 \times n$ है।

अमीना अपने मित्रों से कहती है कि उसका यह नियम कितनी भी संख्या में L बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या बता सकता है।

इस प्रकार, $n = 1$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 1 = 2$;

$n = 2$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 2 = 4$;

$n = 3$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 3 = 6$; इत्यादि।

ये संख्याएँ सारणी–1 में दी हुई संख्याओं जैसी ही हैं।

सरिता कहती है, ''यह नियम बहुत प्रभावशाली है! इस नियम का प्रयोग करके मैं 100 L बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या भी बता सकती हूँ। एक बार नियम ज्ञात हो जाए, तो मुझे प्रतिरूप खींचने या सारणी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होगी''।

क्या आप सरिता से सहमत हैं?

11.3 एक चर की अवधारणा

उपरोक्त उदाहरण में, हमने L का एक प्रतिरूप बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए, एक नियम ज्ञात किया था। नियम यह था :

आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2n$

यहाँ n, L के प्रतिरूपों की संख्या है और n के मान 1, 2, 3, 4,... हो सकते हैं। आइए सारणी-1 को पुनः देखें। सारणी में n का मान बदलता (बढ़ता) जाता है। इसके परिणामस्वरूप, आवश्यक तीलियों की संख्या भी बदलती (बढ़ती) जाती है।

n चर (Variable) का एक उदाहरण है। इसका मान स्थिर (fixed) नहीं है; यह कोई भी मान 1, 2, 3, 4, ... ले सकता है। हमने आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए, चर n का प्रयोग करके, नियम लिखा।

शब्द 'चर' का अर्थ है वह वस्तु जो विचरण (vary) करती है, अर्थात् बदलती है। चर का मान स्थिर नहीं है। यह विभिन्न मान ले (ग्रहण कर) सकता है।

हम चरों के बारे में और अधिक सीखने के लिए, माचिस की तीलियों से बनाए गए प्रतिरूपों में से एक अन्य उदाहरण को देखेंगे।

11.4 माचिस की तीलियों के और प्रतिरूप

अमीना और सरिता तीलियों के इन प्रतिरूपों में रूचि लेने लगी हैं। अब वे अक्षर C का एक प्रतिरूप बनाने का प्रयत्न करती हैं। एक C बनाने के लिए, वे तीन तीलियों का प्रयोग करती हैं, जैसा कि आकृति 11.2(a) में दर्शाया गया है।



(a) (b) (c) (d)

आकृति 11.2

सारणी-2, C का एक प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या प्रदान करती है :

सारणी-2

C की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	....	....	....
आवश्यक तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18	21	24	....	....	....

क्या आप उपरोक्त सारणी में, छोड़ी गई रिक्त प्रविष्टियों को पूरा कर सकते हैं?

सरिता ने यह नियम दिया :

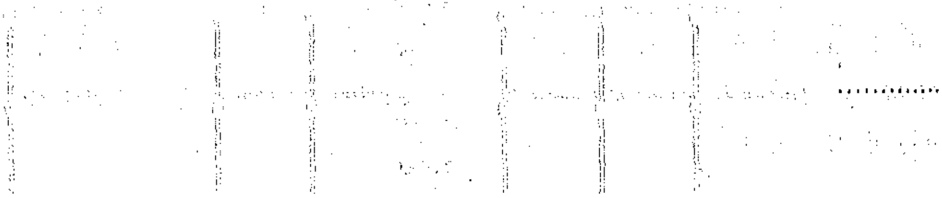
आवश्यक तीलियों की संख्या = $3n$

उसने C की संख्या के लिए अक्षर n का प्रयोग किया है; n एक चर है जो मान 1, 2, 3, 4, ... इत्यादि ले सकता है।

क्या आप सरिता से सहमत हैं?

याद रखिए कि $3n$ वही है जो $3 \times n$ है।

इसके आगे अब अमीना और सरिता F का एक प्रतिरूप बनाना चाहती हैं। वे चार तीलियों का प्रयोग करके एक F बनाती हैं, जैसा कि आकृति 11.3(a) में दर्शाया गया है।



(a) (b) (c)

आकृति 11.3

क्या आप F के प्रतिरूप बनाने के लिए अब कोई नियम लिख सकते हैं?

तीलियों के प्रतिरूपों के उदाहरणों में, हमने प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए एक नियम देने के लिए चर n का प्रयोग किया है। गणित में चरों का एक महत्त्वपूर्ण प्रयोग है प्राप्त किए गए उपरोक्त व्यापक नियमों को लिखना।

तीलियों से बनाए जाने वाले वर्णमाला के अन्य अक्षरों और आकारों के बारे में सोचिए। उदाहरणार्थ, U (⊔), V (\/), त्रिभुज (△), वर्ग (□) इत्यादि। इनमें से कोई पाँच अक्षर या आकार चुनिए और इनके तीलियों के प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम लिखिए।

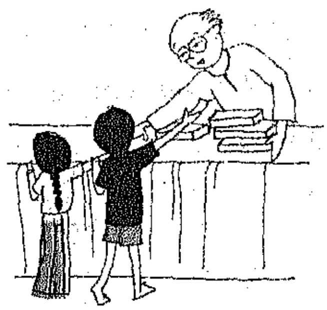
11.5 चरों के और उदाहरण

हमने एक चर को दर्शाने के लिए अक्षर n का प्रयोग किया है। राजू पूछता है, "m क्यों नहीं"? n में कोई विशेष बात नहीं है, किसी भी अक्षर का प्रयोग किया जा सकता है।

एक चर को दर्शाने के लिए, किसी भी अक्षर m, l, p, x, y, z इत्यादि का प्रयोग किया जा सकता है। याद रखिए, एक चर वह संख्या है जिसका मान स्थिर नहीं होता। उदाहरणार्थ, संख्या 5 या संख्या 100 या कोई अन्य दी हुई संख्या एक चर नहीं है। इनके मान स्थिर (निश्चित) हैं। इसी प्रकार, त्रिभुज के कोणों की संख्या का मान स्थिर है, जो 3 है। यह एक चर नहीं है। एक चतुर्भुज के कोणों की संख्या (4) स्थिर है। यह भी एक चर नहीं है। परंतु उपरोक्त उदाहरणों, जो हमने देखें हैं, में n एक चर है। यह विभिन्न मान 1, 2, 3, 4, ... ले (ग्रहण कर) सकता है।

आइए अब एक अधिक परिचित स्थिति में चरों पर विचार करें।

स्कूल के बुक स्टोर से विद्यार्थी अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदने गए। एक अभ्यास-पुस्तिका का मूल्य 5 रु है। मुन्नू 5, अप्पू 7, सारा 4 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदना चाहती है। एक विद्यार्थी को बुक स्टोर से अभ्यास-पुस्तिका खरीदने के लिए कितनी धनराशि की आवश्यकता पड़ेगी?



यह इस पर निर्भर रहेगा कि वह विद्यार्थी कितनी अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदना चाहता है। विद्यार्थी मिलकर एक सारणी बनाते हैं :

सारणी-3

वाँछित अभ्यास पुस्तिकाओं की संख्या	1	2	3	4	5	--	m	--
कुल मूल्य (रुपयों में)	5	10	15	20	25	--	$5m$	--

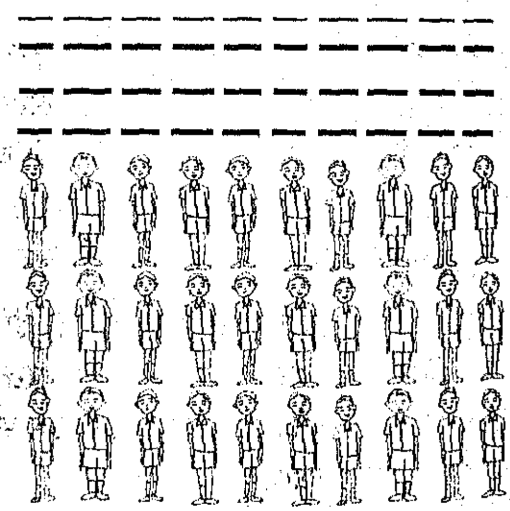
m अभ्यास-पुस्तिकाओं की उस संख्या के लिए प्रयोग किया गया है जो एक विद्यार्थी खरीदना चाहता है। यहाँ m एक चर है, जो कोई भी मान 1, 2, 3, 4, ... ले सकता है। m अभ्यास-पुस्तिकाओं का कुल मूल्य निम्न नियम द्वारा दिया जाता है :

कुल मूल्य (रुपयों में) = 5 × वाँछित अभ्यास-पुस्तिकाओं की संख्या

$= 5m$

यदि मुन्नु 5 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदना चाहता है, तो $m = 5$ लेकर हम कहते हैं कि मुन्नू को 5 × 5 रु, अर्थात् 25 रु अपने साथ ले जाने चाहिए, ताकि वह बुक स्टोर से खरीददारी कर सके।

आइए एक और उदाहरण लें। किसी स्कूल में गणतंत्र दिवस मनाने के अवसर पर, बच्चे मुख्य अतिथि के सम्मुख सामूहिक ड्रिल (Drill) का प्रदर्शन करने जा रहे हैं। वे इस प्रकार खड़े किए जाते हैं कि एक पंक्ति में 10 बच्चे रहें (आकृति 11.4)। इस ड्रिल में कितने बच्चे भाग ले सकते हैं?



आकृति 11.4

बच्चों की संख्या पंक्तियों की संख्या पर निर्भर करेगी। यदि 1 पंक्ति है, तो बच्चों की संख्या 10 होगी। यदि 2 पंक्तियाँ हों, तो बच्चों की संख्या 2×10, अर्थात् 20 होगी। यदि r पंक्तियाँ हों, तो बच्चों की संख्या $10r$ होगी। यहाँ r एक चर है जो पंक्तियों की संख्या प्रदर्शित करता है और यह मान 1, 2, 3, 4, ... ले सकता है।

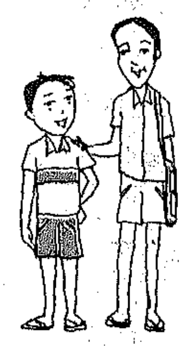
अभी तक हमने जितने उदाहरण देखें हैं उनमें एक चर को एक संख्या से गुणा किया गया है। परंतु विभिन्न स्थितियाँ ऐसी भी हो सकती हैं, जहाँ संख्याओं को चरों में जोड़ा जाता है या चरों में से घटाया जाता है, जैसा कि नीचे देखा जा सकता है।

सरिता का कहना कि उसके कंचों के संग्रह में अमीना के कंचों के संग्रह से 10 अधिक कंचे हैं। यदि अमीना के पास 20 कंचे हैं, तो सरिता के पास 30 कंचे होंगे। यदि अमीना के पास 30 कंचे हैं, तो सरिता के पास 40 कंचे होंगे। हमें यह ज्ञात नहीं है कि अमीना के पास कितने कंचे हैं। उसके पास कंचों की संख्या कुछ भी हो सकती है। परन्तु हम जानते हैं कि सरिता के कंचों की संख्या = अमीना के कंचों की संख्या + 10 है।

हम अमीना के कंचों की संख्या को x से दर्शाएँगे। यहाँ x एक चर है, जो मान 1, 2, 3, 4,... ,10,... ,20,... ,30,... ले सकता है। x का प्रयोग करते हुए, हम लिख सकते हैं कि सरिता के कंचे $= x + 10$ हैं। व्यंजक $(x + 10)$ को 'x धन (Plus) 10 पढ़ा जाता है। इसका अर्थ है कि x का मान 20 है, तो $(x + 10)$ का मान 30 होगा। यदि x का मान 30 है, तो $(x + 10)$ का मान 40 होगा, इत्यादि।

व्यंजक $(x + 10)$ को और अधिक सरल नहीं किया जा सकता है। $x + 10$ को $10x$ से भ्रमित न हों। यह भिन्न-भिन्न हैं। $10x$ में, x को 10 से गुणा किया गया है। $(x + 10)$ में, 10 को x में जोड़ा गया है। हम इसकी जाँच x के कुछ मान लेकर कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,
यदि $x = 2$, तो $10x = 10 \times 2 = 20$ है और $x + 10 = 2 + 10 = 12$ है।
यदि $x = 10$, तो $10x = 10 \times 10 = 100$ है और $x + 10 = 10 + 10 = 20$ है।

राजू और बालू दो भाई हैं। बालू राजू से 3 वर्ष छोटा है। अगर राजू 15 वर्ष का है, तो बालू 9 वर्ष का है। हमें राजू की वर्तमान आयु ज्ञात नहीं है। इसका मान कुछ भी हो सकता है। मान लीजिए, x राजू की वर्षों में आयु व्यक्त करता है। x एक चर है। यदि राजू की आयु वर्षों में x है, तो बालू की आयु वर्षों में $(x - 3)$ है। व्यंजक $(x - 3)$ को x ऋण (minus) 3 पढ़ा जाता है। जैसी कि आप आशा करेंगे, जब x का मान 12 है, तो $(x - 3)$ का मान 9 है और जब x का मान 15 है, तो $(x - 3)$ का मान 12 है।



प्रश्नावली 11.1

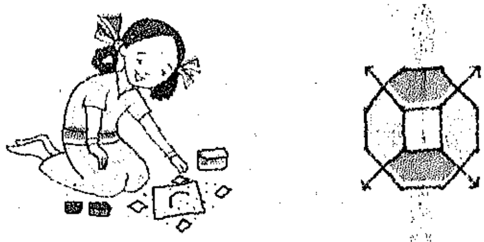
1. तीलियों से प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए एक चर का प्रयोग कीजिए :
   (a) अक्षर T का T के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
   (b) अक्षर Z का Z के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
   (c) अक्षर U का U के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
   (d) अक्षर V का V के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
   (e) अक्षर E का E के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
   (f) अक्षर S का S के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
   (g) अक्षर A का A के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
2. हम अक्षर L, C और F के प्रतिरूपों के लिए नियमों को पहले से जानते हैं। ऊपर प्रश्न 1 में दिए कुछ अक्षरों से वही नियम प्राप्त होता है जो L द्वारा प्राप्त हुआ था। ये अक्षर कौन-कौन से हैं? ऐसा क्यों होता है?
3. किसी परेड में कैडेट (Cadets) मार्च (March) कर रहे हैं। एक पंक्ति में 5 कैडेट हैं। यदि पंक्तियों की संख्या ज्ञात हो, तो कैडेटों की संख्या प्राप्त करने के लिए क्या नियम है? (पंक्तियों की संख्या के लिए n का प्रयोग कीजिए।)

4. एक पेटी में 50 आम हैं। आप पेटियों की संख्या के पदों में आमों की कुल संख्या को किस प्रकार लिखेंगे? (पेटियों की संख्या के लिए b का प्रयोग कीजिए)।

5. शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थी को 5 पेंसिल देता है। विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात होने पर, क्या आप कुल वाँछित पेंसिलों की संख्या बता सकते हैं? (विद्यार्थियों की संख्या के लिए s का प्रयोग कीजिए)।

6. एक चिड़िया 1 मिनट में 1 किलोमीटर उड़ती है। क्या आप चिड़िया द्वारा तय की गई दूरी को (मिनटों में) उसके उड़ने के समय के पदों में व्यक्त कर सकते हैं? (मिनटों में उड़ने के समय के लिए t का प्रयोग कीजिए)।

7. राधा बिंदुओं (Dots) से एक रंगोली बना रही है (खड़िया के पाउडर की सहायता से बिंदुओं को जोड़कर रेखाओं का एक सुंदर प्रतिरूप बनाना, जैसे आकृति 11.5 में है)। उसके पास एक पंक्ति में 8 बिंदु हैं। r पंक्तियों की रंगोली में कितने बिंदु होंगे? यदि 8 पंक्तियाँ हों, तो कितने बिंदु होंगे? यदि 10 पंक्तियाँ हों, तो कितने बिंदु होंगे?



आकृति 11.5

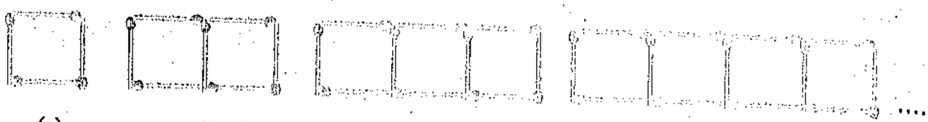
8. लीला राधा की छोटी बहन है। लीला राधा से 4 वर्ष छोटी है। क्या आप लीला की आयु राधा की आयु के पदों में लिख सकते हैं? राधा की आयु x वर्ष है।

9. माँ ने लड्डू बनाए हैं। उन्होंने कुछ लड्डू मेहमानों और परिवार के सदस्यों को दिए। फिर भी 5 लड्डू शेष रह गए हैं। यदि माँ ने l लड्डू दे दिए हों, तो उसने कुल कितने लड्डू बनाए थे?

10. संतरों को बड़ी पेटियों में से छोटी पेटियों में रखा जाना है। जब एक बड़ी पेटी को खाली किया जाता है, तो उसके संतरों से दो छोटी पेटियाँ भर जाती हैं और फिर भी 10 संतरे शेष रह जाते हैं। यदि एक छोटी पेटी में संतरों की संख्या को x लिया जाए, तो बड़ी पेटी में संतरों की संख्या क्या है?

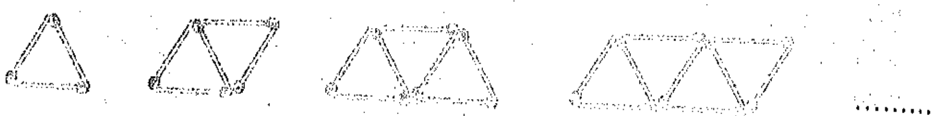
11. (a) तीलियों से बने हुए वर्गों के नीचे दिए प्रतिरूपों को देखिए (आकृति 11.6)। ये वर्ग अलग-अलग नहीं हैं। दो संलग्न वर्गों में एक तीली उभयनिष्ठ है। इस प्रतिरूप को

देखिए और वह नियम ज्ञात कीजिए जो वर्गों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है। (संकेत : यदि आप अंतिम ऊर्ध्वाधर तीली को हटा दें, तो आपको C का प्रतिरूप प्राप्त हो जाएगा)।



आकृति 11.6

(b) आकृति 11.7 तीलियों से बना त्रिभुजों का एक प्रतिरूप दर्शा रही है। उपरोक्त प्रश्न 11 (a) की तरह, वह व्यापक नियम ज्ञात कीजिए जो त्रिभुजों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है।



आकृति 11.7

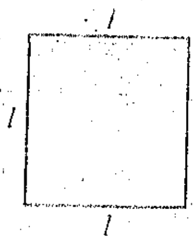
11.6 सामान्य नियमों में चरों का प्रयोग

आइए अब देखें कि गणित के कुछ ऐसे सामान्य नियम, जिन्हें हम पहले ही पढ़ चुके हैं, किस प्रकार चरों का प्रयोग करते हुए व्यक्त किए जाते हैं।

ज्यामिति से नियम

हम क्षेत्रमिति (Mensuration) के अध्याय में, वर्ग के परिमाप और आयत के परिमाप के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। अब हम आपको, उन्हें एक नियम के रूप में लिखने के लिए, वापस लिए चलते हैं।

1. वर्ग का परिमाप : हम जानते हैं कि एक बहुभुज (3 या अधिक रेखाखंडों से बनी बंद आकृति) का परिमाप (perimeter) उसकी भुजाओं की लंबाइयों का योग होता है। वर्ग में चार भुजाएँ होती हैं और प्रत्येक की लंबाई बराबर होती है (आकृति 11.8)।



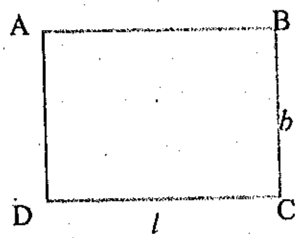
आकृति 11.8

अत:, वर्ग का परिमाप = वर्ग की भुजाओं की लंबाइयों का योग

$= l + l + l + l = 4 \times l = 4l$

इस प्रकार, हम वर्ग के परिमाप का एक नियम प्राप्त कर लेते हैं। चर l का प्रयोग, हमें एक ऐसा व्यापक नियम लिखने में समर्थ बनाता है, जो संक्षिप्त है और जिसे सरलता से याद रखा जा सकता है।

2. **आयत का परिमाप :** हम जानते हैं कि एक आयत की चार भुजाएँ होती हैं। उदाहरणार्थ, आयत ABCD की चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA हैं (आकृति 11.9)। एक आयत की सम्मुख भुजाएँ सदैव बराबर होती हैं। इसलिए, आइए आयत ABCD की भुजाओं AB और CD की लंबाई को l से व्यक्त करें और भुजाओं AD और BC की लंबाई को b से व्यक्त करें।



आकृति 11.9

अत:, आयत का परिमाप = AB की लंबाई + BC की लंबाई + CD की लंबाई + AD की लंबाई

$= l + b + l + b$

$= (l + l) + (b + b)$

$= 2l + 2b$

अत:, नियम यह है :

आयत का परिमाप $= 2l + 2b$

जहाँ l और b क्रमश: आयत की लंबाई और चौड़ाई हैं।

इसकी चर्चा कीजिए कि $l = b$ होने पर क्या होता है।

यदि हम आयत के परिमाप को चर p से व्यक्त करें, तो आयत के परिमाप का नियम निम्न हो जाता है :

$$p = 2l + 2b$$

टिप्पणी : यहाँ l और b दोनों चर हैं। ये एक दूसरे से स्वतंत्र मान ग्रहण करते हैं। अर्थात् एक चर द्वारा ग्रहण किए गए (लिए गए) मान पर दूसरे चर द्वारा ग्रहण किया हुआ मान निर्भर नहीं करता।

ज्यामिति के अपने अध्ययन में, आपके सम्मुख अनेक नियम और सूत्र आएँगे जो समतलीय आकृतियों के परिमापों और क्षेत्रफलों तथा त्रिविमीय आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों से संबंधित होंगे। साथ ही, आप एक बहुभुज के अंत: कोणों के योग, एक बहुभुज के विकर्णों की संख्या इत्यादि के सूत्रों को प्राप्त कर सकते हैं। चरों की अवधारणा, जो आपने पढ़ी है, आपको ऐसे सभी व्यापक नियमों और सूत्रों के लिखने में अति उपयोगी सिद्ध होगी।

अंकगणित के नियम

3. दो संख्याओं के योग की क्रमविनिमेयता

हम जानते हैं कि

$4 + 3 = 7$ और $3 + 4 = 7$ है।

अर्थात् $4 + 3 = 3 + 4$ है।

जैसा कि हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में देख चुके हैं, किसी भी दो पूर्ण संख्याओं के लिए यह सत्य है। संख्याओं का यह गुण **संख्याओं के योग की क्रमविनिमेयता (commutativity)** कहलाता है। 'क्रमविनिमेय' का अर्थ है 'क्रम बदलना'। योग में संख्याओं के क्रम को बदलने से उनके योग में कोई परिवर्तन नहीं आता। चरों का प्रयोग, हमें इस गुण की व्यापकता को एक संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाता है। मान लीजिए a और b दो चर हैं जो कोई भी संख्या का मान ले सकते हैं।

तब, $\boldsymbol{a + b = b + a}$ **होता है।**

एक बार जब हम नियम को इस रूप में लिख लेते हैं, तो इसमें सभी विशिष्ट स्थितियाँ सम्मिलित हो जाती हैं। यदि $a = 4$ और $b = 3$ है, तो हमें $4 + 3 =$

$3 + 4$ प्राप्त होता है। यदि $a = 37$ और $b = 73$ है, तो हमें $37 + 73 = 73 + 37$ प्राप्त होता है, इत्यादि।

4. दो संख्याओं के गुणन की क्रमविनिमेयता

हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में पढ़ चुके हैं कि दो संख्याओं के गुणन के लिए, जिन दो संख्याओं का गुणा किया जाता है तो उनके क्रम से गुणनफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। उदाहणार्थ,

$4 \times 3 = 12$ है और $3 \times 4 = 12$

अतः, $4 \times 3 = 3 \times 4$ है।

संख्याओं का यह गुण **संख्याओं के गुणन की क्रमविनिमेयता** कहलाता है। गुणन में संख्याओं के क्रम को बदलने पर गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं आता है। योग की तरह ही, चर a और b का प्रयोग करके, हम दो संख्याओं के गुणन की क्रमविनिमेयता को

$$a \times b = b \times a$$

के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यहाँ a और b कोई भी संख्या मान ले सकते हैं। इस व्यापक नियम से, सभी विशिष्ट स्थितियाँ जैसे $4 \times 3 = 3 \times 4$ या $37 \times 73 = 73 \times 37$; इत्यादि प्राप्त हो जाती हैं।

5. संख्याओं की वितरणता :

मान लीजिए हमें 7×38 परिकलिपत करने को कहा जाता है। स्पष्टतः, हमें 38 की गुणन सारणी ज्ञात नहीं है। इसलिए, हम निम्न प्रकार परिकलन करते हैं :

$$\begin{aligned} 7 \times 38 &= 7 \times (30 + 8) \\ &= 7 \times 30 + 7 \times 8 \\ &= 210 + 56 \\ &= 266 \end{aligned}$$

यहाँ, हमने $7 \times 38 = 7 \times 30 + 7 \times 8$ माना है, अर्थात् हमने माना है कि 7 से गुणा को 30 और 8 के योग पर वितरित (distribute) किया जा सकता है। यह

7, 30 और 8 जैसी सभी तीन संख्याओं के लिए सत्य है। यह गुण **संख्याओं के योग पर गुणन की वितरणता (distributivity of multiplication over addition of numbers)** कहलाती है। आइए एक अन्य उदाहरण लें। हम जानते हैं कि $9 \times 13 = 117$, $9 \times 11 = 99$ और $9 \times 2 = 18$ है।

साथ ही, $99 + 18 = 117$ है और $11 + 2 = 13$ है।

$$9 \times (11 + 2) = 9 \times 13 = 117 = 99 + 18$$
$$= 9 \times 11 + 9 \times 2$$

अर्थात् $9 \times (11 + 2) = 9 \times 11 + 9 \times 2$ है।

इस प्रकार, संख्या 9, 11 और 2 के लिए वितरण गुण की जाँच हो गई है। चरों का प्रयोग करके, हम संख्याओं के इस गुण को भी एक व्यापक और संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। मान लीजिए a, b और c कोई तीन चर हैं और इनमें से प्रत्येक कोई भी संख्या का मान ग्रहण कर सकता है। तब,

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

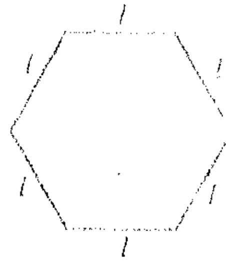
संख्याओं के गुण अति आकर्षक होते हैं। आप इनमें कुछ का अध्ययन संख्याओं में इसी वर्ष में करेंगे और कुछ का बाद में अपने गणित के अध्ययन के साथ करेंगे। चरों का प्रयोग, हमें इन गुणों को एक अति व्यापक और संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाता है। संख्याओं का एक अन्य गुण प्रश्नावली 11.2 के प्रश्न 5 में दिया है। संख्याओं के ऐसे ही कुछ और गुणों को ज्ञात कीजिए और उन्हें चरों का प्रयोग करते हुए व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्नावली 11.2

1. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा को l से दर्शाया जाता है। इस समबाहु त्रिभुज के परिमाप को l का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।

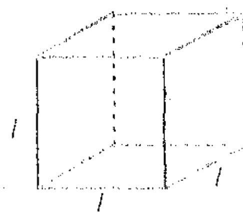
2. एक सम षड्भुज (Regular hexagon) की एक भुजा को l से व्यक्त किया गया है (आकृति 11.10)। l का प्रयोग करते हुए, इस षड्भुज के परिमाप को व्यक्त कीजिए।
([illegible] एक समषड्भुज की सभी 6 भुजाएँ बराबर होती हैं और सभी कोण बराबर होते हैं)।





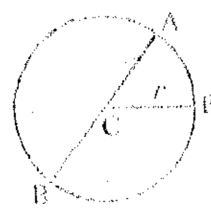
आकृति 11.10

3. घन (Cube) एक त्रिविमीय (three dimensional) आकृति होती है, जैसा कि आकृति 11.11 में दिखाया गया है। इसके 6 फलक होते हैं और ये सभी सर्वसम (identical) वर्ग होते हैं। घन के एक किनारे की लंबाई l से दी जाती है। घन के किनारों की कुल लंबाई के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.11

4. वृत्त का एक व्यास वह रेखाखंड है जो वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को जोड़ता है और उसके केंद्र से होकर जाता है। संलग्न आकृति 11.12 में, AB वृत्त का व्यास है और C उसका केंद्र है। वृत्त के व्यास (d) को उसकी त्रिज्या (r) के पदों में व्यक्त कीजिए।



आकृति 11.12

5. तीन संख्याओं 14, 27 और 13 के योग पर विचार कीजिए। हम यह योग दो प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :

(a) हम पहले 14 और 27 को जोड़कर 41 प्राप्त कर सकते हैं और फिर 41 में 13 जोड़कर कुल योग 54 प्राप्त कर सकते हैं। या

(b) हम पहले 27 और 13 को जोड़ कर 40 प्राप्त कर सकते हैं और फिर इसे 14 में जोड़कर कुल योग 54 प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, $(14 + 27) + 13 = 14 + (27 + 13)$ हुआ।

ऐसा किंही भी तीन संख्याओं के लिए किया जा सकता है। यह गुण संख्याओं के योग का साहचर्य (associative) गुण कहलाता है। इस गुण को जिसे हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में पढ़ चुके हैं, चर a, b और c का प्रयोग करते हुए, एक व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

12.7 चरों वाले व्यंजक

याद कीजिए कि अंकगणित में, हमें $2 \times 10 + 3, 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$ इत्यादि जैसे व्यंजक (expressions) प्राप्त हुए थे। ये व्यंजक 2, 3, 4, 10, 100 इत्यादि जैसी संख्याओं से बनते हैं। ऐसे व्यंजकों को बनाने के लिए, चारों संक्रियाओं का योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, $2 \times 10 + 3$ प्राप्त करने के लिए, हमने 2 और 10 का गुणा करके उसके गुणनफल में 3 जोड़ा है। अन्य अंकगणितीय व्यंजकों के उदाहरण निम्न हैं :

$3 + 4 \times 5$,	$-3 \times 4 + 5$,
$8 - 7 \times 2$,	$14 - (5 - 2)$,
$6 \times 2 - 5$,	$5 \times 7 - 3 \times 4$,
$7 + 8 \times 2$	$5 \times 7 - (3 \times 4 - 7)$, इत्यादि।

व्यंजकों को चरों का प्रयोग करके भी प्राप्त किया जा सकता है। वस्तुतः, हम चरों वाले व्यंजकों को पहले ही देख चुके हैं। उदाहरणार्थ, $2n$, $5m$, $x + 10$, $x - 3$ इत्यादि। चरों वाले ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करने के बाद प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $2n$ चर n को 2 से गुणा करने पर बनता है, व्यंजक $(x + 10)$ चर x में 10 जोड़ने पर बनता है, इत्यादि।

हम जानते हैं कि चर विभिन्न मान ले सकते हैं, इनका कोई निश्चित मान नहीं होता है। परंतु ये संख्याएँ हैं। इसी कारण, संख्याओं की ही तरह इन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं।

चरों वाले व्यंजकों के संबंध में एक महत्त्वपूर्ण बात ध्यान देने योग्य है। एक संख्यात्मक व्यंजक जैसे $4 \times 3 + 5$ का सरलता से मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ,

$$4 \times 3 + 5 = 12 + 5 = 17$$

परंतु $(4x + 5)$ जैसे व्यंजक, जिसमें एक चर x आ रहा है, का मान निकालना संभव नहीं है। यदि चर x का मान दिया हो, केवल तभी व्यंजक का मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ, जब $x = 3$ है, तो

$4x + 5 = 4 \times 3 + 5 = 17$ है, जो ऊपर पहले भी प्राप्त हुआ था।

नीचे आने वाली कुछ पंक्तियों में, हम देखेंगे कि कैसे कुछ व्यंजक बनाए जाते हैं।

व्यंजक	कैसे बनाया गया
(a) $y + 5$	y में 5 जोड़ने पर
(b) $t - 7$	t में से 7 घटाने पर
(c) $10\,a$	a को 10 से गुणा करने पर
(d) $\frac{x}{3}$	x को 3 से भाग देने पर
(e) $-5\,q$	q को -5 से गुणा करने पर
(f) $3\,x + 2$	पहले x को 3 से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में 2 जोड़ने पर
(g) $2\,y - 5$	पहले y को 2 से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में से 5 घटाने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं।

हमें किसी व्यंजक को उस स्थिति में बनाने में भी समर्थ हो जाना चाहिए, जब यह निर्देश दिए हों कि उसे किस प्रकार बनाना है। निम्नलिखित उदाहरण को देखिए:

निम्न के लिए व्यंजक दीजिए :

(a) z में से 12 घटाना	$z - 12$
(b) r में 25 जोड़ना	$r + 25$
(c) p में 16 से गुणा	$16\,p$
(d) y को 8 से भाग देना	$\frac{y}{8}$
(e) m का -9 से गुणा	$-9\,m$

(f)	y में 10 से गुणा और फिर गुणनफल में 7 जोड़ना	$10\,y + 7$
(g)	n में 2 से गुणा और फिर गुणनफल में से l घटाना	$2\,n - l$

सरिता और अमीना ने व्यंजकों का एक खेल खेलने का निर्णय लिया। उन्होंने एक चर x और एक संख्या 3 ली और देखा कि वे कितने व्यंजक बना सकते हैं। इसमें प्रतिबंध यह है कि वे चारों संख्या संक्रियाओं में से केवल एक संक्रिया ही प्रयोग कर सकते हैं और प्रत्येक व्यंजक में x अवश्य होना चाहिए। क्या आप इनकी सहायता कर सकते हैं?



सरिता $(x + 3)$ सोचती है।

फिर, अमीना $(x - 3)$ बनाती है।

क्या $(3x + 5)$ बनाया जा सकता है?
क्या $(3x + 3)$ बनाया जा सकता है?

उससे अगला वह $3x$ कहती है। तब सरिता तुरंत $\frac{x}{3}$ कहती है। दिए हुए प्रतिबंध के अंतर्गत क्या केवल ये चार व्यंजक ही बनाए जा सकते हैं?

अब इसके आगे, वे y, 3 और 5 के संयोजनों की सहायता से व्यंजक बनाने का प्रयत्न करती हैं। प्रतिबंध यह है कि वे योग और व्यवकलन में से एक तथा गुणन और विभाजन में से एक संक्रिया चुन सकते हैं। प्रत्येक व्यंजक में y अवश्य होना चाहिए। जाँच कीजिए कि क्या उनके उत्तर जो नीचे दिए गए हैं सही हैं :

क्या $\left(\frac{y}{3} + 5\right)$ बनाया जा सकता है?
क्या $(y + 8)$ बनाया जा सकता है?
क्या $15\,y$ बनाया जा सकता है?

$y + 5,\ y + 3,\ y - 5,\ y - 3,$

$3y,\ 5y,\ \frac{y}{3},\ \frac{y}{5},\ 3y + 5,\ 3y - 5,\ 5y + 3,\ 5y - 3$

क्या आप कुछ अन्य व्यंजक बना सकते हैं?

प्रश्नावली 11.3

1. आप तीन संख्या 5, 7 और 8 से संख्याओं वाले (चर नहीं) जितने व्यंजक बना सकते हैं बनाइए। एक संख्या एक से अधिक बार प्रयोग नहीं की जानी चाहिए। केवल योग, व्यवकलन (घटाना) और गुणन का ही प्रयोग करें।

   (संकेत: तीन संभावित व्यंजक $5 + (8 - 7)$, $5 - (8 - 7)$ और $5 \times 8 + 7$ हैं। अन्य व्यंजक बनाइए)।



2. निम्नलिखित में से कौन-से व्यंजक केवल संख्याओं वाले व्यंजक ही हैं?

   (a) $y + 3$ (b) $7 \times 20 - 8z$
   (c) $5(21 - 7) + 7 \times 2$ (d) 5
   (e) $3x$ (f) $5 - 5n$
   (g) $7 \times 20 - 5 \times 10 - 45 + p$

3. निम्न व्यंजकों को बनाने में प्रयुक्त संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन) को पहचानिए (छाँटिए) और बताइए कि ये व्यंजक किस प्रकार बनाए गए हैं :

   (a) $z + 1, z - 1, y + 17, y - 17,$ (b) $17y, \frac{y}{17}, 5z,$
   (c) $2y + 17, 2y - 17,$ (d) $7m, -7m + 3, -7m - 3$

4. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए :

   (a) p में 7 जोड़ना (b) p में से 7 घटाना
   (c) p को 7 से गुणा करना (d) p को 7 से भाग देना
   (e) $-m$ में से 7 घटाना (f) $-p$ को 5 से गुणा करना
   (g) $-p$ को 5 से भाग देना (h) p को -5 से गुणा करना

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए :

   (a) $2m$ में 11 जोड़ना (b) $2m$ में से 11 घटाना
   (c) y के 5 गुने में 3 जोड़ना (d) y के 5 गुने में से 3 घटाना
   (e) y का -8 से गुणा
   (f) y को -8 से गुणा करके परिणाम में 5 जोड़ना
   (g) y को 5 से गुणा करके परिणाम को 16 में से घटाना

(h) y को -5 से गुणा करके परिणाम को 16 में जोड़ना

6. (a) t और 4 का प्रयोग करके व्यंजक बनाइए। एक से अधिक संख्या संक्रिया का प्रयोग न करें। प्रत्येक व्यंजक में t अवश्य होना चाहिए।

   (b) y, 2 और 7 का प्रयोग करके व्यंजक बनाइए। प्रत्येक व्यंजक में y अवश्य होना चाहिए। केवल दो संख्या संक्रियाओं का प्रयोग करें। ये भिन्न-भिन्न होनी चाहिए।

11.8 व्यावहारिक रूप से व्यंजकों का प्रयोग

हमारे सम्मुख कई व्यावहारिक परिस्थितियाँ आ चुकी हैं, जहाँ व्यंजक उपयोगी होते हैं। आइए कुछ को याद करने का प्रयत्न करें :

	परिस्थिति (साधारण भाषा में वर्णित)	चर	व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथन
1.	सरिता के पास अमीना से 10 कंचे अधिक हैं।	मान लीजिए अमीना के पास x कंचे हैं।	सरिता के पास $(x + 10)$ कंचे हैं।
2.	बालू राजू से 3 वर्ष छोटा है।	मान लीजिए राजू की आयु x वर्ष है।	बालू की आयु $(x - 3)$ वर्ष है।
3.	विकास की आयु राजू की आयु की दोगुनी है।	मान लीजिए राजू की आयु x वर्ष है।	विकास की आयु $2x$ वर्ष है।
4.	राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तिगुने से 2 वर्ष अधिक है।	मान लीजिए राजू की आयु x वर्ष है।	राजू के पिता की आयु $(3x + 2)$ वर्ष है।

आइए ऐसी ही अन्य परिस्थितियों को देखें :

	परिस्थिति (साधारण भाषा में वर्णित)	चर	व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथन
5.	आज से 5 वर्ष पहले सुसान की आयु क्या थी?	मान लीजिए सुसान की वर्तमान आयु वर्षों में y है।	आज से 5 वर्ष पहले सुसान की आयु $(y + 5)$ वर्ष थी।
6.	4 वर्ष पहले सुसान की आयु	मान लीजिए सुसान की	4 वर्ष पहले सुसान की

	क्या थी?	वर्तमान आयु वर्षों में y है।	की आयु $(y-4)$ वर्ष थी।
7.	गेहूँ का प्रति किग्रा मूल्य चावल के प्रति किग्रा मूल्य से 5 रु कम है।	मान लीजिए प्रति किग्रा चावल का मूल्य p रु है।	गेहूँ का प्रति किग्रा मूल्य $(p-5)$ रु है।
8.	प्रति लीटर तेल का मूल्य प्रति किग्रा चावल के मूल्य का 5 गुना है।	मान लीजिए चावल का प्रति किग्रा मूल्य p रु है।	प्रति लीटर तेल का मूल्य $5p$ रु है।
9.	एक बस की चाल उसी सड़क पर जाते हुए ट्रक की चाल से 10 किमी/घंटा अधिक है।	मान लीजिए ट्रक की चाल y किमी/घंटा है।	बस की चाल $(y+10)$ किमी/घंटा है।

ऐसी ही कुछ अन्य परिस्थितियों को ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। आप यह अनुभव करेंगे कि साधारण भाषा में ऐसे अनेक कथन हैं, जिन्हें आप चरों वाले व्यंजकों का प्रयोग होने वाले कथनों में बदल सकते हैं। अगले अनुच्छेद में, हम देखेंगे कि किस प्रकार हम इन व्यंजकों द्वारा बने कथनों का अपने कार्यों में प्रयोग करते हैं।

प्रश्नावली 11.4

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

   (a) सरिता की वर्तमान आयु y वर्ष लीजिए।

   (i) आज से 5 वर्ष बाद उसकी आयु क्या होगी?

   (ii) 3 वर्ष पहले उसकी आयु क्या थी?

   (iii) सरिता के दादाजी की आयु उसकी आयु की 6 गुनी है। उसके दादाजी की क्या आयु है?

   (iv) उसकी दादीजी दादाजी से 2 वर्ष छोटी हैं। दादीजी की आयु क्या है?

   (v) सरिता के पिता की आयु सरिता की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। उसके पिता की आयु क्या है?

(b) एक आयताकार हॉल की लंबाई उसकी चौड़ाई के तिगुने से 4 मीटर कम है। यदि चौड़ाई b मीटर है, तो लंबाई क्या है?

(c) एक आयताकार बक्स की ऊँचाई h सेमी है। इसकी लंबाई, ऊँचाई की 5 गुनी है और चौड़ाई, लंबाई से 10 सेमी कम है। बक्स की लंबाई और चौड़ाई को ऊँचाई के पदों में व्यक्त कीजिए।

(d) मीना, बीना और लीना पहाड़ी की चोटी पर पहुँचने के लिए सीढ़ियाँ चढ़ रही हैं। मीना सीढ़ी s पर है। बीना, मीना से 8 सीढ़ियाँ आगे है और लीना मीना से 7 सीढ़ियाँ पीछे है। बीना और लीना कहाँ पर हैं? चोटी पर पहुँचने के लिए कुल सीढ़ियाँ मीना द्वारा चढ़ी गई सीढ़ियों की संख्या के चार गुने से 10 कम है। सीढ़ियों की कुल संख्या को s के पदों में व्यक्त कीजिए।

(e) एक बस v किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यह दासपुर से बीसपुर जा रही है। बस के 5 घंटे चलने के बाद भी बीसपुर 20 किमी दूर रह जाता है। दासपुर से बीसपुर की दूरी क्या है? इसे v का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।

2. व्यंजकों के प्रयोग से बने निम्न कथनों को साधारण भाषा के कथनों में बदलिए : (उदाहरणार्थ, एक क्रिकेट मैच में सलीम ने r रन बनाए और नलिन ने $(r + 15)$ रन बनाए। साधारण भाषा में, नलिन ने सलीम से 15 रन अधिक बनाए हैं)।

(a) एक अभ्यास-पुस्तिका का मूल्य p रु है। एक पुस्तक का मूल्य $3p$ रु है।

(b) टोनी ने मेज पर q कंचे रखे। उसके पास डिब्बे में $8\,q$ कंचे हैं।

(c) हमारी कक्षा में n विद्यार्थी हैं। स्कूल में $20\,n$ विद्यार्थी हैं।

(d) जग्गू की आयु z वर्ष है। उसके चाचा की आयु $4\,z$ वर्ष है और उसकी चाची की आयु $(4z - 3)$ वर्ष है।

(e) बिंदुओं (dots) की एक व्यवस्था में r पंक्तियाँ हैं। प्रत्येक पंक्ति में 5 बिंदु हैं।

3. (a) मुन्नू की आयु x वर्ष दी हुई है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि $(x - 2)$ क्या दर्शाएगा?

(संकेत : मुन्नू के छोटे भाई के बारे में सोचिए)। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि $(x + 4)$ क्या दर्शाएगा और $(3\,x + 7)$ क्या दर्शाएगा?

(b) सारा की वर्तमान आयु y वर्ष दी हुई है। उसकी भविष्य की आयु और पिछली आयु के बारे में सोचिए। निम्नलिखित व्यंजक क्या सूचित करते हैं?

$$y + 7,\ y - 3,\ y + 4\frac{1}{2},\ y - 2\frac{1}{2}$$

(c) दिया हुआ है कि एक कक्षा के n विद्यार्थी फुटबाल खेलना पसंद करते हैं। $2n$ क्या दर्शाएगा? $\frac{n}{2}$ क्या दर्शा सकता है? ([illegible] फुटबाल के अतिरिक्त अन्य खेलों के बारे में सोचिए)।

आइए आकृति 11.1 में दी हुई तीलियों से बने अक्षर L के प्रतिरूप को याद करें। अपनी सुविधा के लिए, हमने यहाँ आकृति 11.1 को पुनः बनाया है :

(a) (b) (c)

विभिन्न संख्याओं के L बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या सारणी 1 में दी गई थी। हम इस सारणी को पुनः यहाँ दे रहे हैं।

सारणी 1

बनाए गए L की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	----
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	----

हम जानते हैं कि आवश्यक तीलियों की संख्या निम्न नियम से दी जाती है :

$2n$, यदि n बनाए गए L की संख्या है।

अप्पू सदैव अलग तरीके से सोचता है। वह पूछता है, हम जानते हैं कि L की संख्या दी हुई रहने पर आवश्यक तीलियों की संख्या किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है। इसकी विपरीत प्रक्रिया के बारे में क्या कहा जा सकता है? माचिस की तीलियों की संख्या दी हुई रहने पर, L की संख्या कैसे ज्ञात की जा सकती है?

हम अपने आपसे एक निश्चित प्रश्न पूछते हैं।

यदि 10 तीलियाँ दी हुई हों, तो कितने L बनेंगे?

इसका अर्थ है कि हम L की संख्या (अर्थात् n) ज्ञात करना चाहते हैं, यदि तीलियों की संख्या $2n = 10$ (1)

दी हुई है।

यहाँ हम एक प्रतिबंध प्राप्त करते हैं, जो चर n द्वारा संतुष्ट होना चाहिए। यह प्रतिबंध समीकरण (equation) का एक उदाहरण है।

हमारे प्रश्न का उत्तर सारणी-1 को देखकर प्राप्त किया जा सकता है। n के विभिन्न मानों को देखिए। यदि $n = 1$ है, तो तीलियों की संख्या 2 है। स्पष्टतः, प्रतिबंध संतुष्ट नहीं हुआ है, क्योंकि संख्या 2 संख्या 10 नहीं है। हम जाँच कर सकते हैं।

n	$2n$	क्या प्रतिबंध संतुष्ट है? हाँ/नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	हाँ
6	12	नहीं
7	14	नहीं

हम पाते हैं कि केवल $n = 5$ के लिए उपरोक्त प्रतिबंध अर्थात् समीकरण $2n = 10$ संतुष्ट हो जाती है। 5 के अतिरिक्त n के किसी भी अन्य मान के लिए यह समीकरण संतुष्ट नहीं होती है।

आइए एक अन्य समीकरण को देखें।

बालू, राजू से 3 वर्ष छोटा है। राजू की आयु x वर्ष लेने पर, बालू की आयु $(x - 3)$ वर्ष होगी। मान लीजिए कि बालू की आयु 11 वर्ष है। तब, आइए देखें कि हमारी विधि किस प्रकार राजू की आयु ज्ञात करती है।

हमें बालू की आयु, $x - 3 = 12$ (2)
प्राप्त है।

यह चर x में एक समीकरण है। हम x के विभिन्न मानों के लिए, $(x - 3)$ के मानों की एक सारणी बनाते हैं।

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x - 3$	0	1	–	–	–	–	–	–	–	9	10	11	12	13	–	–

जिन प्रविष्टियों को रिक्त छोड़ा गया है, उन्हें पूरा कीजिए। सारणी से हम ज्ञात करते हैं कि केवल $x = 14$ के लिए प्रतिबंध $x - 3 = 11$ संतुष्ट होता है। अन्य मानों जैसे $x = 16$ या $x = 12$ के लिए प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है। अतः, राजू की आयु 14 वर्ष है।

उपरोक्त का सार यह है कि **एक समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। यह चर के केवल एक निश्चित मान के लिए ही संतुष्ट होती है।** उदाहरणार्थ, समीकरण $2n = 10$ चर n के केवल मान 5 से ही संतुष्ट होती है। इसी प्रकार, समीकरण $x - 3 = 11$ चर x के केवल मान 14 से ही संतुष्ट होती है।

ध्यान दीजिए कि एक समीकरण के दोनों पक्षों के बीच में **समता (समिका) चिह्न** (=) होता है। समीकरण बताती है कि बाएँ पक्ष (वाम पक्ष) (LHS) का मान दाएँ पक्ष (दक्षिण पक्ष) (RHS) के मान के बराबर है। यदि बायाँ पक्ष दाएँ पक्ष के बराबर न हो, तो हमें समीकरण प्राप्त नहीं होती।

उदाहरणार्थ, कथन $2n$ संख्या 10 से बड़ा है, अर्थात् $2n > 10$ एक समीकरण नहीं है। इसी प्रकार, कथन $2n$ संख्या 10 से छोटा है, अर्थात् $2n < 10$ भी एक समीकरण नहीं है। साथ ही, कथन $(x - 3) > 11$ और $(x - 3) < 11$ समीकरण नहीं हैं।

आइए अब $8 - 3 = 5$ पर विचार करें।

यहाँ भी बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष के बीच में समता का चिन्ह (=) है। दोनों पक्षों में चर संख्या नहीं है। यहाँ दोनों पक्षों में संख्याएँ हैं। हम इन्हें संख्यात्मक समीकरण कह सकते हैं। सामान्यतः शब्द समीकरण का प्रयोग केवल एक या अधिक चरों के होने पर ही किया जाता है।

आइए एक प्रश्न हल करें।

बताइए निम्नलिखित में से कौन-कौन से कथन समीकरण हैं। समीकरण की स्थिति में, समबद्ध चर भी बताइए।

(a) $x + 20 = 70$ (हाँ, x)

(b) $8 \times 3 = 24$ (नहीं, यह एक संख्यात्मक समीकरण है)

(c) $2p > 30$ (नहीं)

(d) $n - 4 = 100$ (हाँ, n)

(e) $20b = 80$ (हाँ, b)

(f) $\frac{y}{8} < 50$ (नहीं)

समीकरणों के कुछ उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं। (कुछ समीकरणों में समबद्ध चर भी दिए गए हैं)।

वाँछित रिक्त स्थानों को भरिए :

$x + 10 = 30$ (चर x) (3)

$p - 3 = 7$ (चर p) (4)

$3n = 21$ (चर ____) (5)

$\frac{t}{5} = 4$ (चर ____) (6)

$2l + 3 = 7$ (चर ____) (7)

$2m - 3 = 5$ (चर ____) (8)

हम पिछले अनुच्छेद में देख चुके हैं कि समीकरण

$2n = 10$ (1)

$n=5$ से संतुष्ट हो गई थी। n का कोई भी अन्य मान इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। **समीकरण में चर का वह मान जो समीकरण को संतुष्ट करता है, उस समीकरण का एक हल (solution) कहलाता है।** इस प्रकार, $n = 5$ समीकरण $2n = 10$ का एक हल है।

ध्यान दीजिए कि $n = 6$ समीकरण $2n = 10$ का हल नहीं है, क्योंकि $n = 6$ के लिए $2n = 2 \times 6 = 12$ है और यह 10 नहीं है।

साथ ही, $n = 4$ भी हल नहीं है। बताइए, क्यों नहीं है।

आइए समीकरण

$$x - 3 = 11 \qquad (2)$$

को लें। यह समीकरण $x = 14$ से संतुष्ट हो जाती है, क्योंकि $x = 14$ के लिए, समीकरण का बायाँ पक्ष $= 14 - 3 = 11 =$ दायाँ पक्ष है। यह समीकरण $x = 16$ से संतुष्ट नहीं होती है, क्योंकि $x = 16$ के लिए, समीकरण का बायाँ पक्ष $= 16 - 3 = 13$ है, जो दाएँ पक्ष के बराबर नहीं है।

इस प्रकार, $x = 14$ समीकरण $x - 3 = 11$ का एक हल है, परंतु $x = 16$ इस समीकरण का हल नहीं है। साथ ही, $x = 12$ भी इस समीकरण का हल नहीं है। स्पष्ट कीजिए क्यों नहीं है। अब निम्नलिखित सारणी की प्रविष्टियों को पूरा कीजिए और स्पष्ट कीजिए कि आपके उत्तर हाँ/नहीं क्यों हैं।

समीकरण	चर का नाम	हल (हाँ/नहीं)
1. $x + 10 = 30$	$x = 10$	नहीं
2. $x + 10 = 30$	$x = 30$	नहीं
3. $x + 10 = 30$	$x = 20$	हाँ
4. $p - 3 = 7$	$p = 5$	नहीं
5. $p - 3 = 7$	$p = 15$	–
6. $p - 3 = 7$	$p = 10$	–
7. $3n = 21$	$n = 9$	–

8. $3n = 21$	$n = 7$	–
9. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	–
10. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	–
11. $2l + 3 = 7$	$l = 5$	–
12. $2l + 3 = 7$	$l = 1$	–
13. $2l + 3 = 7$	$l = 2$	–

11.10 एक समीकरण का हल प्राप्त करना

समीकरण $2n = 10$ का हल ज्ञात करने के लिए, हमने n के विभिन्न मानों की एक सारणी तैयार की थी और फिर इस सारणी से n का वह मान चुन लिया जो समीकरण का हल था (अर्थात् समीकरण को संतुष्ट करता था)। हमने जो किया वह एक **प्रयत्न और भूल विधि (a trial and error method)** थी। यह हल ज्ञात करने की **सीधी (प्रत्यक्ष)** या **व्यावहारिक विधि** नहीं है। अब हम समीकरण को हल करने, अर्थात् उसको ज्ञात करने की एक सीधी विधि अपनाते हैं। हम केवल अगले वर्ष (अर्थात् अगली कक्षा में) ही समीकरण हल करने की एक क्रमबद्ध विधि का अध्ययन करेंगे। वर्तमान स्थिति में, हम केवल नीचे दी हुई सरल समीकरणों के बारे में ही बात करेंगे :

(a) $x + 10 = 30$ (b) $x - 3 = 10$

(c) $2n = 10$ (d) $\frac{m}{5} = 4$

$x + 10 = 30$ को हल करना

पिछली कक्षाओं से हम जानते हैं कि कथन $\square + 10 = 30$ में रिक्त खानों की संख्या को कैसे ज्ञात किया जाता है।

x में समीकरण $x + 10 = 30$ (a)

और $\square + 10 = 30$ (b)

की तुलना कीजिए।

यदि हम (b) में $\square$ के स्थान पर x लिखें, तो हमें समीकरण प्राप्त हो जाती है। इसका अर्थ है कि रिक्त खाने में संख्या ज्ञात करना वही है जैसे x का वह मान ज्ञात करना जिससे समीकरण संतुष्ट हो जाती है। खाने में ऐसी संख्या आएगी जिसे 10 में जोड़ने पर 30 प्राप्त होगा। दूसरे शब्दों में, यह 30 में से 10 घटाने के बराबर है, अर्थात् 20 है।

इस प्रकार, समीकरण का हल $x = 20$ है।

हम इस हल की जाँच कर सकते हैं :

बायाँ पक्ष $= x + 10 = 20 + 10 = 30$ या बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अब इस समीकरण को हल कीजिए : $y + 5 = 12$

इस समीकरण की $\square + 5 = 12$ से तुलना कीजिए।

हम जानते हैं कि $\square = 12 - 5 = 7$

अतः, वाँछित हल $y = \square = 7$ है।

उपरोक्त विधि से $p + 7 = 10$ को हल कीजिए।

$x - 3 = 10$ को हल करना

$x - 3 = 10$ की तुलना $\square - 3 = 10$ से कीजिए।

इसका अर्थ है कि समीकरण को हल करने के लिए रिक्त खाने की संख्या ज्ञात करना। अब रिक्त खाने की संख्या योग से दी जाती है, जो

$$\square = 10 + 3 = 13 \text{ है।}$$

अतः, समीकरण $x - 3 = 10$ का हल $x = 13$ है, जिसे हम पहले से जानते हैं। हम इस हल की जाँच भी कर सकते हैं :

बायाँ पक्ष $= x - 3 = 13 - 3 = 10 =$ दायाँ पक्ष

इसी विधि से, $y - 7 = 5$ को हल कीजिए।

$2n = 10$ को हल करना

हम जानते हैं कि $2n = 2 \times n$ है।

अतः जिस समीकरण को हम हल करना चाहते हैं, वह

$$2 \times n = 10 \text{ है।}$$

इसकी तुलना $2 \times \square = 10$ से कीजिए।

n में समीकरण को हल करने का अर्थ है कि रिक्त खाने में संख्या ज्ञात करना। हम जानते हैं कि रिक्त खाने की संख्या को विभाजन द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

इस प्रकार, $\square = \frac{10}{2} = 5$ है।

अतः समीकरण $2n = 10$ का हल $n = 5$ है, जिसे हम पहले से जानते हैं।

हम इस हल की जाँच कर सकते हैं।

बायाँ पक्ष $= 2 \times n = 2 \times 5 = 10 =$ दायाँ पक्ष

$\frac{m}{5} = 4$ को हल करना

हम $\frac{m}{5} = 4$ की तुलना $\frac{\square}{5} = 4$ से करते हैं।

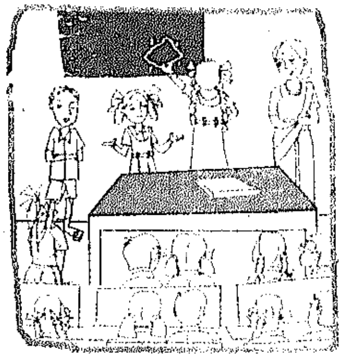
m में समीकरण हल करने का अर्थ वही है जो रिक्त खाने में संख्या ज्ञात करने का है। पिछली कक्षाओं से, हम जानते हैं कि यह कार्य गुणा करके किया जा सकता है।

अब, $\square = 5 \times 4 = 20$ है।

अतः, उपरोक्त समीकरण का हल $m = 20$ है।

हम इस हल की जाँच कर सकते हैं : बायाँ पक्ष $= \frac{m}{5} = \frac{20}{5} = 4 =$ दायाँ पक्ष

अप्पू, सरिता और अमीना बहुत उत्साहित हैं। वे कक्षा में बताती हैं कि उन्होंने पहेलियाँ हल करने की विधि ज्ञात कर ली है। वे इसे पूरी कक्षा को समझाना चाहती हैं।



पहले वे सारा से कहती हैं कि वह कोई भी संख्या अपने मस्तिष्क में सोच ले। इसके बाद वे कहती हैं कि इस संख्या को 5 से गुणा करके परिणाम बता दो। वह कहती है, परिणाम 60 है। अप्पू तुरंत कहता है कि सारा के मस्तिष्क में संख्या 12 है। सारा सहमत हो जाती है। पूरी कक्षा को आश्चर्य होता है।

अमीना समझाती है :

सारा ने अपने मस्तिष्क में कोई संख्या सोची। वह कुछ भी हो सकती है। इसलिए, हमने पहले x ले लिया। अब x को 5 से गुणा करने पर $5x$ प्राप्त होता है। सारा ने बताया कि यह 60 है। इस प्रकार, हमें प्रतिबंध

$5x = 60$ प्राप्त हो गया।

यह प्रतिबंध हमारे द्वारा सीखी गई सरल समीकरणों जैसा ही है। हमने एक सरल विधि से इस समीकरण को हल कर लिया। हमने x के स्थान पर '$\square$' रखकर इसी समीकरण को $5 \times \square = 60$ लिख लिया।

हमें प्राप्त होता है : $\square = \dfrac{60}{5} = 12$

इस प्रकार, 12 वाँछित हल है, अर्थात् सारा द्वारा सोची गई संख्या 12 थी।

पूरी कक्षा ने ताली बजाई। उन्होंने सीखा कि समीकरण कितनी उपयोगी होती हैं। गणित शिक्षक ने अप्पू, सरिता और अमीना को बधाई दी। शिक्षक ने बताया ''इन तीनों द्वारा प्रस्तुत की गई पहेली से कहीं अधिक दैनिक जीवन की चुनौतीपूर्ण

पहेलियाँ और समस्याएँ समीकरणों द्वारा हल की जा सकती हैं। परन्तु ऐसा करने के लिए, हमें समीकरणों को हल करने की एक क्रमबद्ध विधि सीखनी होगी। ऐसी विधि हम अगले वर्ष सीखेंगे"।

इस अध्याय के अंत में, आइए एक और समीकरण को हल करने की प्रक्रिया करें। हम एक समीकरण को उस समीकरण से समबद्ध चर पर एक प्रतिबंध मान कर चलें हैं। उदाहरणार्थ, समीकरण $5x = 60$ चर x पर एक प्रतिबंध है।

x का केवल एक मान, अर्थात् $x = 12$ समीकरण को संतुष्ट करता है। प्रारंभ करने से पहले, हमें यह मान ज्ञात नहीं है। समीकरण हल करने का अर्थ है, इस अज्ञात का मान ज्ञात करना। हम x को इस अज्ञात के रूप में देख सकते हैं। यही अप्पू, सरिता और अमीना ने किया था। वे सारा के मस्तिष्क की संख्या को नहीं जानती थीं। उन्होंने इसे अज्ञात मान कर x कहा और वह प्रतिबंध प्राप्त किया जिसे वह संतुष्ट करता है।

यह प्रतिबंध एक समीकरण था। समीकरण को हल करके, उन्होंने अज्ञात का मान ज्ञात कर लिया।

इस प्रकार, समीकरण बनाना और उन्हें हल करना, अज्ञात राशियों के मान ज्ञात करने और इसके फलस्वरूप पहेलियों और समस्याओं को हल करने के लिए एक प्रभावशाली विधि है।

बीजगणित का प्रारंभ

यह कहा जाता है कि गणित की एक शाखा के रूप में बीजगणित का प्रारंभ लगभग 1550 ई पूर्व में अर्थात् आज से 3500 वर्ष पूर्व हुआ, जब मिस्रवासियों ने अज्ञात संख्याओं को व्यक्त करने के लिए संकेतों का प्रयोग करना प्रारंभ किया था।

300 ई पूर्व के आस-पास भारत में अज्ञातों को अक्षरों से व्यक्त करना और व्यंजक बनाना एक बहुत सामान्य बात थी। अनेक महान भारतीय गणितज्ञों, जैसे **आर्यभट्ट** (जन्म 476 ई), **ब्रह्मगुप्त** (जन्म 598 ई), **महावीर** (जो लगभग 850 ई में रहे) और **भास्कर-II** (जन्म 1114 ई) तथा कई अन्य ने

बीजगणित के अध्ययन में बहुत योगदान दिया। उन्होंने अज्ञात राशियों के लिए **बीज, वर्ण** इत्यादि जैसे नाम दिए और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के नामों के प्रथम अक्षरों के रूप में प्रयोग किया (जैसे काला से 'का', नीला से 'नी', इत्यादि।) 'एल्जबरा' (Algebra) के लिए भारतीय नाम 'बीजगणित' इन्हीं प्राचीन भारतीय गणितज्ञों के समय काल का है।

शब्द 'एल्जबरा' लगभग 825 ई में बगदाद के एक अरब गणितज्ञ मुहम्मद इबन अल खोवारिज्मी द्वारा लिखित एक पुस्तक "अलजिबार वॉल अलमुगाबालाह" के शीर्षक से लिया गया है।

प्रश्नावली 11.5

1. बताइए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन समीकरण (चर संख्याओं के) हैं? सकारण उत्तर दीजिए। समीकरणों में समबद्ध चर भी लिखिए।

(a) $17 = x + 17$ (b) $(t - 7) > 5$ (c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $7 \times 3 - 13 = 8$ (e) $5 \times 4 - 8 = 2x$ (f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$ (h) $2n + 1 = 11$ (i) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(j) $7 = 11 \times 2 + p$ (k) $20 = 5y$ (l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$ (n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$ (o) $7 - x = 5$

2. सारणी के तीसरे स्तम्भ में प्रविष्टियों को पूरा कीजिए :

क्रम सं	समीकरण	चर का मान	समीकरण संतुष्ट : हाँ/नहीं
(a)	$10y = 80$	$y = 10$	
(b)	$10y = 80$	$y = 8$	
(c)	$10y = 80$	$y = 5$	
(d)	$4l = 20$	$l = 20$	

(e)	$4l = 20$	$l = 80$	
(f)	$4l = 20$	$l = 5$	
(g)	$b + 5 = 9$	$b = 5$	
(h)	$b + 5 = 9$	$b = 9$	
(i)	$b + 5 = 9$	$b = 4$	
(j)	$h - 8 = 5$	$h = 8$	
(k)	$h - 8 = 5$	$h = 0$	
(l)	$h - 8 = 5$	$h = 3$	
(m)	$p + 3 = 1$	$p = 3$	
(n)	$p + 3 = 1$	$p = 1$	
(o)	$p + 3 = 1$	$p = 0$	
(p)	$p + 3 = 1$	$p = -1$	
(q)	$p + 3 = 1$	$p = -2$	

3. प्रत्येक समीकरण के सम्मुख कोष्ठकों में दिए मानों में से समीकरण का हल चुनिए दर्शाइए कि अन्य मान समीकरण को संतुष्ट नहीं करते हैं।

(a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)

(b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)

(c) $p - 5 = 5$ (0, 10, 5, − 5)

(d) $\frac{q}{2} = 7$ (7, 2, 10, 14)

(e) $r - 4 = 0$ (4, − 4, 8, 0)

(f) $x + 4 = 2$ (− 2, 0, 2, 4)

4. (a) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $m + 10 = 16$ का हल ज्ञात कीजिए :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	__	__	__
$m + 10$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(b) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $5t = 35$ का हल ज्ञात कीजिए :

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	___	___	___	___	___
$5t$	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___

(c) सारणी को पूरा कीजिए और समीकरण $\frac{z}{3} = 4$ का हल ज्ञात कीजिए :

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	___	___	___
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	___	___	___	___	___	___	___	___	___

(d) सारणी को पूरा कीजिए और समीकरण $m - 7 = 3$ का हल ज्ञात कीजिए :

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	___	___
$m - 7$	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___	___

5. हल कीजिए :

(a) $x + 5 = 12$ (b) $y - 2 = 10$

(c) $7p = 210$ (d) $\frac{q}{2} = 5$

(e) $t + 100 = 125$ (f) $l - 20 = 30$

(g) $9u = 81$ (h) $\frac{k}{8} = 20$

(i) $3y = 33$ (j) $x - 3 = 0$

(k) $\frac{k}{8} = 8$ (l) $13y = 65$

6. निम्नलिखित पहेलियों को हल कीजिए। आप ऐसी पहेलियाँ स्वयं भी बना सकते हैं।

मैं कौन हूँ?

(i) एक वर्ग के अनुदिश जाइए।
प्रत्येक कोने को तीन बार गिनकर और उससे अधिक नहीं,
मुझमें जोड़िए और
ठीक चौंतीस प्राप्त कीजिए।

(ii) मैं एक विशिष्ट संख्या हूँ।
मुझमें से एक छः निकालिए।
और क्रिकेट की एक टीम बनाइए।

(iii) सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिए,
मेरे से ऊपर गिनिए।
यदि आपने कोई गलती नहीं की है,
तो आप तेइस प्राप्त करेंगे।

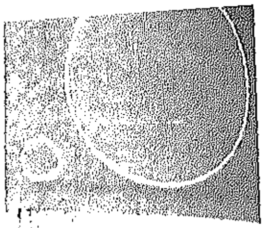
(iv) बताइए मैं कौन हूँ।
मैं एक सुंदर संकेत दे रही हूँ
आप मुझे वापिस पाएँगे,
यदि मुझे बाइस में से निकालेंगे।

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने तीलियों का प्रयोग करके अक्षरों और अन्य आकार बनाने के प्रतिरूप देखे। हमने किसी आकार को कई बार बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए व्यापक नियम लिखना सीखा। वह आकार जिसे बनाया जा रहा है, जितनी बार बनाया जाता है वह संख्या बदलती रहती है। इसके मान 1,2,3,... हो सकते हैं। यह एक चर है, जिसे किसी अक्षर जैसे n से व्यक्त किया जाता है।
2. एक चर विभिन्न मान लेता (ग्रहण करता) है। इसका मान स्थिर (निश्चित) नहीं होता। एक वर्ग की लंबाई का कुछ भी मान हो सकता है। यह एक चर है। परंतु किसी त्रिभुज के कोणों की संख्या तीन निश्चित है। यह एक चर नहीं है।
3. हम एक चर को दर्शाने के लिए कोई भी अक्षर n, l, m, p, x, y, z इत्यादि का प्रयोग कर सकते हैं।
4. व्यावहारिक स्थितियों में, हम चरों की सहायता से विभिन्न संबंधों को व्यक्त कर सकते हैं।
5. चर संख्याएँ ही हैं, यद्यपि इनके मान स्थिर या निश्चित नहीं हैं। हम संख्याओं की तरह इन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ कर सकते हैं। विभिन्न

संक्रियाओं का प्रयोग करके, हम चर वाले व्यंजक जैसे $x-3, x+3, 2n, 5m, \frac{p}{3}$, $2y+3, 3l-5$ इत्यादि बना सकते हैं।

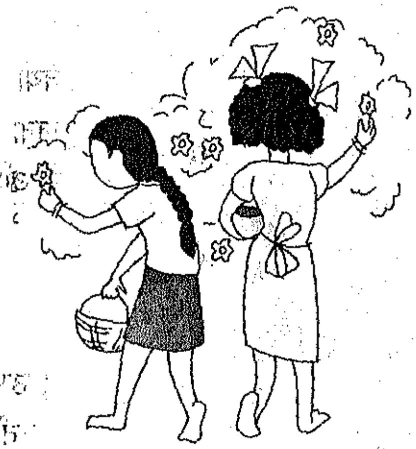
6. चर हमें ज्यामिति और अंकगणित दोनों के सामान्य नियमों को व्यापक रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाते हैं। उदाहरणार्थ, यह नियम कि दो संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योग वही रहता है, हम $a+b=b+a$ के रूप में लिख सकते हैं। यहाँ चर a और b किसी भी संख्या 1, 32, 1000, – 7, – 20 इत्यादि के मान ले सकते हैं।
7. समीकरण, चर पर एक प्रतिबंध होता है। इसे एक चर वाला व्यंजक बराबर एक स्थिर संख्या के रूप में भी ले सकते हैं, जैसे $x-3=10$ है।
8. एक समीकरण के दो पक्ष होते हैं – बायाँ पक्ष (LHS) और दायाँ पक्ष (RHS)। इन दोनों के बीच में समता (समिका) का चिन्ह (=) होता है।
9. समीकरण का बायाँ पक्ष समीकरण के दाएँ पक्ष के बराबर उस समीकरण में समबद्ध चर के एक निश्चित मान के लिए ही होता है। हम कहते हैं कि चर का वह निश्चित मान समीकरण को संतुष्ट करता है। स्वयं यह मान समीकरण का हल कहलाता है।
10. हल ज्ञात करने की एक विधि प्रयत्न और भूल विधि है। इस विधि में, हम चर को कोई मान देकर यह जाँच करते हैं कि यह मान समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं। चर को हम ऐसे विभिन्न मान तब तक देते रहते हैं, जब तक हम चर का वह सही मान न प्राप्त कर लें, जो समीकरण को संतुष्ट करता है।
11. हमें किसी समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए प्रयत्न और भूल विधि से अधिक क्रमबद्ध विधि की आवश्यकता है। अति सरल समीकरणों की स्थितियों में, चर को एक रिक्त □ से बदला जा सकता है। पिछली कक्षाओं से हम जानते हैं कि □ का मान कैसे ज्ञात किया जाता है। यही चर का मान होगा और समीकरण का हल होगा।
12. जब हमें एक समीकरण दी जाती है, तो उसका हल, अर्थात् चर का वह मान जो समीकरण को संतुष्ट करता है, अज्ञात होता है। समीकरण हल करने का अर्थ है कि अज्ञात ज्ञात करना। समीकरण के चर को हम अज्ञात मान सकते हैं। इस प्रकार, समीकरण का हल करना, अज्ञात राशि ज्ञात करना ही है। इसीलिए, यह एक प्रभावशाली विधि है।



अध्याय 12

अनुपात और समानुपात

12.1 भूमिका



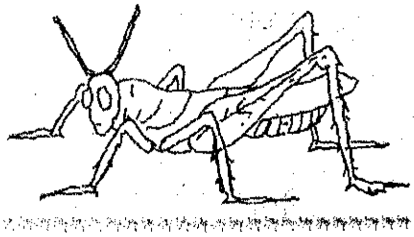
हमारे दैनिक जीवन में अनेक बार हमें दो एक जैसी राशियों की तुलना करनी पड़ती है। उदाहरणत: अवनी और शैरी ने अपनी स्क्रैप फाइल के लिए फूल इकट्ठे किए। अवनी ने 30 और शैरी ने 45 फूल इकट्ठे किये।

हम कह सकते हैं कि शैरी ने अवनी से 45–30=15 फूल अधिक इकट्ठे किए।



यह अंतर द्वारा तुलना की एक विधि है। रहीम का कद 150 सेमी और अवनी का 140 सेमी है। इस प्रकार रहीम का कद अवनी से 150 सेमी – 140 सेमी = 10 सेमी अधिक है।

यदि हम एक चींटी और एक टिड्डे की लंबाई की तुलना करना चाहें तो अंतर द्वारा इस तुलना को दिखाना उचित नहीं होगा। टिड्डे की लंबाई 4 सेमी से 5 सेमी होती है जोकि चींटी की लंबाई से बहुत लंबी है क्योंकि चींटी की लंबाई कुछ मिमी ही होती है। तुलना ज्यादा अच्छी होगी यदि हम टिडडे की लंबाई के बराबर एक के पीछे एक, चींटियों की पंक्ति बना दें। इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि 20 से 30 चींटियों की कुल लंबाई एक टिड्डे की लंबाई के समान है।



अगला उदाहरण लेते हैं, एक कार का मूल्य 2,50,000 रु है और एक मोटर साइकिल का मूल्य 50,000 रु है यदि हम उनके मूल्यों का अंतर लें तो यह

2,00,000 रु होगा। यदि हम तुलना भाग द्वारा करें तो वह इस प्रकार होगी :

$$\frac{2,50,000}{50,000} = \frac{5}{1}$$

हम कह सकते हैं कि कार का मूल्य मोटर साइकिल के मूल्य का पाँच गुना है। इस प्रकार कुछ परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना, अंतर द्वारा तुलना से बेहतर सिद्ध होती है। भाग द्वारा तुलना को ही अनुपात कहा जाता है। आगे के खंड में हम अनुपात के विषय में और अधिक सीखेगें।

12.2 अनुपात

निम्न को देखिए :

ईशा का वज़न 25 किग्रा है और उसके पिता का 75 किग्रा। पिता का वज़न, पुत्री के वज़न का कितना गुना है? यह तीन गुना है।



एक पेन का मूल्य 10 रु है और एक पेंसिल का मूल्य 2 रु है। पेन का मूल्य पेंसिल के मूल्य का कितने गुना है? स्पष्ट है कि पाँच गुना।

उपरोक्त उदाहरण में हमने दो राशियों की ''कितने गुना'' के रूप में तुलना की। यह तुलना अनुपात कहलाती है। हम अनुपात को ':' चिह्न द्वारा दर्शाएँगे।

पिछले उदाहरणों को दोबारा लेते हैं। हम कह सकते हैं :

पिता के वजन का पुत्री के वजन के साथ अनुपात $= \frac{75}{25} = \frac{3}{1} = 3:1$

पेन के मूल्य का पेंसिल के मूल्य से अनुपात $= \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5:1$

प्रयास कीजिए

1. एक कक्षा में 20 लड़के और 40 लड़कियाँ हैं लड़कों की संख्या का, लड़कियों की संख्या से क्या अनुपात होगा?
2. रवि एक घंटे में 6 किमी चलता है जबकि रोशन एक घंटे में 4 किमी चलता है। रवि द्वारा तय की गई दूरी से रोशन द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात ज्ञात कीजिए?

इस समस्या की ओर देखिए :

एक कक्षा में 20 लड़के तथा 40 लड़कियाँ हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए :

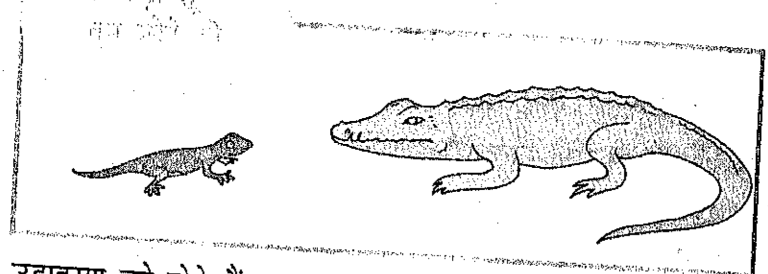
(a) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों से

(b) लड़कों की संख्या का कुल विद्यार्थियों से

सर्वप्रथम हमें कुल विद्यार्थियों की संख्या की आवश्यकता है जो कि इस प्रकार है: लड़कियों की संख्या + लड़कों की संख्या $= 20 + 40 = 60$

तब, लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

भाग (b) का हल इसी प्रकार निकालिए।



निम्न उदाहरण को लेते हैं :

घर में पाई जाने वाली छिपकली की लंबाई 20 सेमी है और मगरमच्छ की लंबाई 4 मीटर।

"मैं तुमसे पाँच गुनी लंबी हूँ" छिपकली ने कहा। जैसा कि हम देख सकते हैं कि यह बिल्कुल गलत है। एक छिपकली की लंबाई मगरमच्छ की लंबाई से पाँच गुना नहीं हो सकती। तो गलती कहाँ है? ध्यान से देखें तो छिपकली की लंबाई सेमी में है और मगरमच्छ की लंबाई मीटर में दी गई है। अतः हमें उनकी लंबाइयों को एक जैसी इकाइयों में बदलना होगा।

मगरमच्छ की लंबाई = 4 मी $= 4 \times 100 = 400$ सेमी

अतः, मगरमच्छ की लंबाई का छिपकली की लंबाई से अनुपात इस प्रकार होगा

$= \frac{400}{20} = \frac{20}{1} = 20:1$

दो राशियों की तुलना तभी की जा सकती है वे दोनों एक ही इकाई में हों।

छिपकली की लंबाई का मगरमच्छ की लंबाई से अनुपात क्या होगा?

यह होगा $\frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 1:20$

ध्यान दीजिए कि 1 : 20 और 20 : 1 दोनों एक दूसरे से भिन्न हैं। अनुपात 1 : 20 छिपकली की लंबाई का मगरमच्छ की लंबाई से है और 20 : 1 मगरमच्छ की लंबाई का छिपकली की लंबाई के साथ है।

एक और उदाहरण देखते हैं :

पेंसिल की लंबाई 18 सेमी है और इसका व्यास 8 मिमी है। पेंसिल के व्यास का उसकी लंबाई के साथ अनुपात क्या होगा? व्यास तथा लंबाई दोनों की इकाई अलग दी हुई हैं अतः उन्हें समान इकाई में बदलने की आवश्यकता है।

पेंसिल की लंबाई = 18 सेमी = 18 × 10 मिमी = 180 मिमी

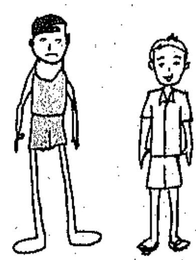
पेंसिल के व्यास का उसकी लंबाई के साथ अनुपात

$$= \frac{8}{180} = \frac{2}{45} = 2:45$$

प्रयास कीजिए

1. सौरभ घर से स्कूल पहुँचने में 15 मिनट लेता है और सचिन एक घंटा लेता है। सौरभ द्वारा लिए गए समय और सचिन द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात करो।
2. एक टॉफी का मूल्य 50 पैसे है और एक चॉकलेट का 10 रुपये। टॉफी के मूल्य का चॉकलेट के मूल्य से अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. एक स्कूल में एक वर्ष में 73 छुट्टियाँ बनती हैं। छुट्टियों का वर्ष के कुल दिनों के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

कुछ और ऐसी ही परिस्थितियों के विषय में सोचिए जहाँ आपको दो समान राशियों की तुलना करनी पड़े और दोनों राशियों की इकाइयाँ भिन्न हों।

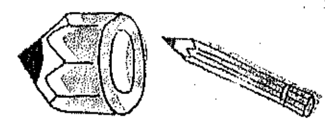


A B

हम अनुपात की संकल्पना का प्रयोग दैनिक जीवन की बहुत सी परिस्थितियों में बिना जाने ही करते हैं।

आकृति A तथा B की तुलना करें। आकृति B, आकृति A से ज्यादा वास्तविक लगता है। क्यों?

चित्र A में टाँगें बाकी शरीर की तुलना में लंबी हैं। यह इसलिए हैं कि हम टाँगों की शरीर के अन्य हिस्सों से तुलना में एक खास अनुपात की आशा रखते हैं।



चित्र में बनी दोनों पेंसिलों की तुलना कीजिए। क्या पहली पेंसिल देखने में पूरी पेंसिल लगती है? नहीं। क्यों नहीं? कारण यह है कि पेंसिल की मोटाई और लंबाई में सही अनुपात नहीं है।

हम अलग-अलग परिस्थितियों में एक जैसा अनुपात देख सकते हैं।

निम्न को देखें :

- एक कमरे की लंबाई 30 मी और इसकी चौड़ाई 20 मी है। अतः कमरे की लंबाई का चौड़ाई से अनुपात $= \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 3:2$
- एक पिकनिक में 24 लड़कियाँ और 16 लड़के जा रहे हैं। लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात $= \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 3:2$

दोनों ही उदाहरणों में अनुपात 3 : 2 है।

- न्यूनतम रूप में 30 : 20 और 24 : 16 अनुपात समान है, वह 3 : 2 है। यह तुल्य अनुपात कहलाते हैं।

क्या आप कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं जो न्यूनतम रूप में 3 : 2 के तुल्य हों?

इस प्रकार की परिस्थितियाँ लिखना, जिनसे एक खास अनुपात मिले, रोचक होगी। उदाहरण के लिए एक ऐसी परिस्थिति लिखिए जिससे अनुपात 2 : 3 प्राप्त हो।

- मेज की चौड़ाई का लंबाई से अनुपात 2 : 3 है।
- शीना के पास 2 कंचे हैं और उसकी मित्र शबनम के पास 3 कंचे हैं। शीना और शबनम के कंचों का अनुपात 2 : 3 है।

क्या आप कुछ और ऐसे उदाहरण लिख सकते हैं जिसमें यही अनुपात आए? अपने मित्रों को कुछ अनुपात देकर उनसे उनपर आधारित कुछ उदाहरण बनवाएँ।

रवि और रानी ने एक व्यापार शुरू किया और 2 : 3 में धन निवेश किया. एक वर्ष बाद कुल लाभ 40,000 रु था।

रवि ने कहा कि हम यह लाभ बराबर बाँट लेते हैं। रानी ने उत्तर दिया "मुझे ज्यादा मिलना चाहिए क्योंकि मैंने ज्यादा निवेश किया है।"

तब यह निर्णय लिया गया कि निवेश के अनुपात में ही लाभ बाँटा जाएगा।



यहाँ 2 : 3 के अनुपात में 2 और 3 दो ही राशियाँ हैं।

इन राशियों का योग = 2 + 3 = 5

इसका क्या अर्थ है?

इसका अर्थ है कि यदि 5 रुपये लाभ है तो रवि को 2 रुपये और रानी को 3 रु मिलेंगे।

और हम कह सकते हैं कि 5 हिस्सों में से 2 हिस्से रवि को और 3 हिस्से रानी को मिलेंगे।

इससे अभिप्राय होगा कि रवि को कुल लाभ का $\frac{2}{5}$ मिलेगा और रानी को $\frac{3}{5}$।

यदि कुल लाभ 500 रु है

तो रवि को मिलेगा $\frac{2}{5} \times 500 = 200$ रु

और रानी को $\frac{3}{5} \times 500 = 300$ रु

अब, यदि कुल लाभ 40,000 रु हो तो प्रत्येक को कितना हिस्सा मिलेगा?

रवि का हिस्सा $= \frac{2}{5} \times 40000$ रु $= 16,000$ रु

और रानी का हिस्सा $= \frac{3}{5} \times 40000$ रु $= 24,000$ रु

क्या आप कुछ और उदाहरणों के विषय में सोच सकते हैं जहाँ आपको कुछ चीजों को एक अनुपात में बाँटना है? तीन ऐसी और समस्याओं को बनाइए और अपने मित्रों से हल करवाइए।

प्रयास कीजिए



1. अपने बैग में रखी कापियों की संख्या का पुस्तकों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. अपनी कक्षा की कुल डैस्क का कुल कुर्सियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. अपनी कक्षा में उन छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनकी आयु 12 वर्ष से ऊपर है। अब 12 वर्ष से ऊपर आयु वाले छात्रों की संख्या का कक्षा के बाकी छात्रों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. अपनी कक्षा के दरवाजों की संख्या का खिड़कियों की संख्या से अनुपात निकालिए।
5. एक आयत बनाइए। उसकी लंबाई का चौड़ाई से अनुपात निकालिए।

अब तक जिस तरह की समस्याओं को हल करना हमने सीखा उन्हें देखें :

उदाहरण 1 : एक आयताकार मैदान की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 50 मी और 15 मी है। मैदान की लंबाई का चौड़ाई से अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार मैदान की लंबाई = 50 मी

आयताकार मैदान की चौड़ाई = 15 मी

लंबाई का चौड़ाई से अनुपात = 50 : 15

अनुपात इस प्रकार लिखा जा सकता है $\frac{50}{15} = \frac{50 \quad 5}{15 \quad 5} = \frac{10}{3} = 10:3$

अतः अनुपात होगा 10 : 3

उदाहरण 2 : 90 सेमी और 1.5 मी का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दोनों राशियाँ एक ही इकाई में नहीं हैं। अतः उन्हें समान इकाई में बदलने पर 1.5 मी = 1.5 × 100 सेमी = 150 सेमी

अतः वांछित अनुपात है

$90 : 150 = \frac{90}{150} = \frac{90 \quad 30}{150 \quad 30} = \frac{3}{5}$

अतः वांछित अनुपात है 3 : 5

उदाहरण 3 : एक दफ्तर में 45 लोग काम करते हैं। जहां महिलाओं की संख्या 25 है और शेष पुरुष हैं। निम्न में अनुपात ज्ञात कीजिए :

(a) महिलाओं की संख्या का पुरुषों की संख्या से

(b) पुरुषों की संख्या का महिलाओं की संख्या से

हल : महिलाओं की संख्या = 25

कर्मियों की कुल संख्या = 45

पुरुषों की संख्या = 45 – 25 = 20

अतः महिलाओं की संख्या का पुरुषों की संख्या के साथ अनुपात

= 25 : 20 = 5 : 4

और पुरुषों की संख्या का महिलाओं की संख्या के साथ अनुपात

= 20 : 25 = 4 : 5.

(ध्यान दें कि 5 : 4 और 4 : 5 में अंतर है)

6 : 4 के दो तुल्य अनुपात लिखिए।

अनुपात 6 : 4 = $\frac{6}{4} = \frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{12}{8}$.

अतः, 12 : 8 और 6 : 4 तुल्य अनुपात हैं।

इसी प्रकार, 6 : 4 = $\frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$

3 : 2 एक अन्य तुल्य अनुपात है।

इसी प्रकार, हम किसी भी अनुपात का तुल्य अनुपात अंश और हर में एक समान संख्या से गुणा या भाग द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

6 : 4 के दो और तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

रिक्त स्थानों को भरिए :

$$\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

पहला रिक्त स्थान भरने के लिए हम 21 = 3 × 7 तथ्य का प्रयोग करेंगे। अर्थात् 21 को 7 से भाग देने पर 3 प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि दूसरे अनुपात का रिक्त स्थान प्राप्त करने के लिए 14 को 7 से भाग करना पड़ेगा।

भाग करने पर, 14 ÷ 7 = 2

अतः दूसरा अनुपात $\frac{2}{3}$ है।

इसी तरह, तीसरे अनुपात के लिए , दूसरे अनुपात की दोनों राशियों को 3 से गुणा करना पड़ेगा। (क्यों?)

अतः, तीसरा अनुपात $\frac{6}{9}$ है।

इस प्रकार, $\frac{14}{21} = \frac{\boxed{2}}{3} = \frac{6}{\boxed{9}}$ [ये सभी तुल्य अनुपात हैं।]

उदाहरण 6 : मैरी के घर से स्कूल की दूरी का जॉन के घर से स्कूल की दूरी का अनुपात 2 : 1 है।

(a) स्कूल के अधिक निकट कौन रहता है?

(b) निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कुछ संभव दूरियां दर्शाती हैं जहाँ मैरी और जॉन रह सकते हों।

मैरी के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	10	☐	4	☐	☐
जॉन के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	5	4	☐	3	1

(c) यदि मैरी के घर से स्कूल की दूरी का कलाम के घर से स्कूल की दूरी का अनुपात 1 : 2 हो तो स्कूल के ज्यादा निकट कौन रहता है।

हल : (a) जॉन स्कूल के ज्यादा निकट रहता है (क्योंकि अनुपात 2 : 1 है)

(b)

मैरी के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	10	8	4	6	2
कलाम के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	5	4	2	3	1

(c) क्योंकि अनुपात 1 : 2 है अतः मैरी स्कूल के ज्यादा निकट रहती है।

उदाहरण 7 : कृति और किरन के बीच 60 रु को 1 : 2 में बाँटिए।

हल : अनुपात के दो हिस्से 1 और 2 हैं।

अतः, दोनों हिस्सों का योग = 1 + 2 = 3

इसका अर्थ है कि यदि 3 रु हैं तो कृति को 1 रु और किरन को 2 रु मिलेगें। यानी कि 3 में से कृति को एक हिस्सा और किरन को 2 हिस्से मिलेंगे।

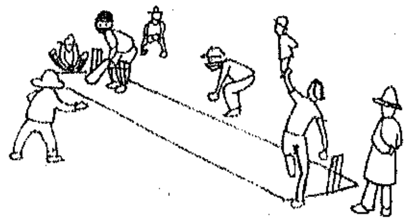
अतः, कृति का हिस्सा $= \frac{1}{3} \times 60$ रु $= 20$ रु

और किरन का हिस्सा $= \frac{2}{3} \times 60$ रु $= 40$ रु

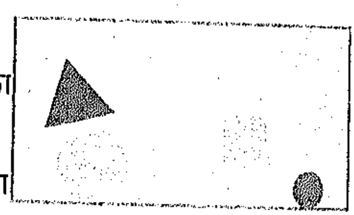
प्रश्नावली 12.1

1. एक कक्षा में 20 लड़कियाँ और 15 लड़के हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से
   (b) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से

2. 30 विद्यार्थियों की कक्षा में 6 फुटबाल, 12 क्रिकेट और बाकी टेनिस पसंद करते हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (a) फुटबाल पंसद करने वालों की संख्या का टेनिस पसंद करने वालों की संख्या से
   (b) क्रिकेट प्रेमियों का कुल विद्यार्थियों की संख्या से



3. आकृति को देखकर अनुपात निकालिए :
   (a) आयत के अंदर के सभी त्रिभुजों की संख्या का वृत्तों की संख्या से।
   (b) आयत के अंदर के सभी वर्गों की संख्या का सभी आकृतियों से
   (c) आयत के अंदर के सभी वृत्तों का सभी आकृतियों से।



4. हामिद और अख्तर ने एक घंटे में क्रमशः 9 किमी और 12 किमी की दूरी तय की। हामिद और अख्तर की चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. रिक्त स्थानों को भरिए

   $\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30}$ [क्या ये तुल्य अनुपात है?]

6. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) 81 का 108 से (b) 98 का 63 से
   (c) 33 किमी का 121 किमी से (d) 30 मिनट का 45 मिनट से
7. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) 30 मिनट का 1.5 घंटे (b) 40 सेमी का 1.5 मी
   (c) 55 पैसे का 1 रुपया (d) 500 मिलि का 2 लीटर
8. एक वर्ष में सीमा 1,50,000 रु कमाती है और 50,000 रु की बचत करती है। प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (a) सीमा द्वारा किया गया व्यय और उसकी बचत का
   (b) सीमा द्वारा की गई बचत और उसके द्वारा किए गए व्यय का
9. एक विद्यालय में 3300 विद्यार्थी और 102 शिक्षक हैं। शिक्षकों की संख्या का विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. एक कॉलेज में 4320 विद्यार्थियों में से 2300 लड़कियाँ हैं। अनुपात निकालिए :
    (a) लड़कियों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या का
    (b) लड़कों की संख्या और लड़कियों की संख्या का
    (c) लड़कों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या का
11. एक विद्यालय के 1800 विद्यार्थियों में से 750 ने बास्केट बॉल, 800 ने क्रिकेट और शेष ने टेबल टेनिस खेलना पसंद किया है। यदि एक छात्र केवल एक खेल चुने तो अनुपात ज्ञात कीजिए :
    (a) बास्केट बॉल खेलने वालों और टेबल टेनिस खेलने वालों का।
    (b) क्रिकेट खेलने वालों और बास्केट बॉल खेलने वालों का।
    (c) बास्केट बॉल खेलने वालों और कुल विद्यार्थियों का।



12. एक दर्जन पेन का मूल्य 180 रु है और 8 बॉल पेन का मूल्य 56 पेन है। पेन के मूल्य का बॉल पेन के मूल्य से अनुपात ज्ञात कीजिए।
13. कथन को देखें : एक हॉल की चौड़ाई और लंबाई का अनुपात 2 : 5 है। निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कि हॉल की कुछ संभव चौड़ाई व लंबाई दिखाती है:

हाल की चौड़ाई (मी में)	10	☐	40
हाल की लंबाई (मी में)	25	50	☐

14. शीला और संगीता के बीच 20 पेनों को 3 : 2 में बाँटिए।
15. एक माता अपनी बेटी श्रेया और भूमिका में 36 रुपयों को उनकी आयु के अनुपात में बाँटना चाहती हैं। यदि श्रेया की आयु 15 वर्ष और भूमिका की आयु 12 वर्ष हो तो श्रेया और भूमिका को कितना-कितना मिलेगा?
16. पिता की वर्तमान आयु 42 वर्ष और उसके पुत्र की 14 वर्ष है। अनुपात ज्ञात कीजिए:
    (a) पिता की वर्तमान आयु का और पुत्र की वर्तमान आयु से
    (b) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पुत्र 12 वर्ष का था
    (c) 10 वर्ष बाद की पिता की आयु का 10 वर्ष बाद की पुत्र की आयु से
    (d) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पिता 30 वर्ष का था

12.3 समानुपात

इस स्थिति को देखिए :

राजू बाजार से टमाटर खरीदने जाता है। एक दुकानदार ने कहा कि 5 किग्रा टमाटर का मूल्य 40 रु है। दूसरे दुकानदार ने 6 किग्रा टमाटर का मूल्य 42 रु बताया। अब राजू को क्या करना चाहिए? उसे टमाटर पहले दुकानदार से खरीदने चाहिए या दूसरे दुकानदार से? निर्णय लेने में, क्या अंतर लेकर तुलना करना सहायता करेगा? नहीं। क्यों नहीं?

उसकी सहायता के लिए कोई तरीका सोचिए। अपने मित्रों के साथ विचार-विमर्श कीजिए।

एक और उदाहरण लेते हैं :



भाविका के पास 28 कंचे हैं और विनि के पास 180 फूल। वे दोनों इन्हें आपस में बाँटना चाहती हैं। भाविका ने 14 कंचे विनि को दिए और विनि ने 90 फूल भाविका को। लेकिन विनि संतुष्ट नहीं हुई। उसने सोचा कि उसने भाविका को ज्यादा फूल दिए जबकि भाविका ने उसे कम कंचे दिए।

आप क्या सोचते हैं? क्या विनि सही है? दोनों इस समस्या के समाधान के लिए विनि की माता पूजा के पास गये।

पूजा ने समझाया कि 28 कंचों में से भाविका ने 14 कंचे विनि को दिए

अतः, अनुपात होगा 14 : 28 = 1 : 2

और 180 फूलों में से 90 फूल विनि ने भाविका को दिए

अतः, अनुपात 90 : 180 = 1 : 2

क्योंकि दोनों अनुपात समान है अतः वितरण सही है।



दो सहेलियाँ आशमा और पंखुरी हेयर क्लिप खरीदने बाजार गईं। उन्होंने 30 रु में 20 हेयर क्लिप खरीदे। आशमा ने 12 रु दिए और पंखुरी ने 18 रु दिए। घर आने पर आशमा ने पंखुरी से 10 हेयर क्लिप देने को कहा। लेकिन पंखुरी ने कहा कि जब मैंने ज्यादा रुपये दिए हैं तो मुझे ज्यादा हेयर क्लिप मिलने चाहिए। उसके अनुसार, आशमा को 8 और उसे 12 हेयर क्लिप मिलने चाहिए।

क्या आप बता सकते हो कि आशमा या पंखुरी में से सही कौन है? क्यों?

आशमा द्वारा दिए गए धन और पंखुरी द्वारा दिए गए धन का अनुपात

= 12 : 18 = 2 : 3

आशमा के सुझाव के अनुसार,

आशमा के हेयर क्लिप की संख्या और पंखुरी के हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात = 10 : 10 = 1 : 1

पंखुरी के सुझाव के अनुसार,

आशमा के हेयर क्लिप की संख्या और पंखुरी के हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात = 8 : 12 = 2 : 3

आशमा द्वारा किए गए वितरण के अनुसार हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात, दिए गए धन के अनुपात के समान नहीं है, जो कि होना चाहिए था। जबकि पंखुरी द्वारा किए गए वितरण में दोनों परिस्थितियों में अनुपात समान है।

अतः पंखुरी ने सही वितरण किया।

एक अनुपात को बाँटने का अर्थ है, कुछ!

निम्न उदाहरणों को लेते हैं :

- राज ने 15 रु में 3 पेन खरीदे और अनु ने 50 रु में 10 पेन खरीदे। किसके पेन महंगे थे?

  राज द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या और अनु द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या का अनुपात = 3 : 10.

  उनके मूल्यों का अनुपात = 15 : 50 = 3 : 10

  3 : 10 और 15 : 50 समान है। इस प्रकार, दोनों ने समान मूल्य में पेन खरीदे।

- रहीम ने 60 रु में 2 किग्रा सेब बेचे और रोशन ने 120 रु में 4 किग्रा। किसने सेब महंगे बेचे?

  सेब के भारों का अनुपात = 2 किग्रा : 4 किग्रा = 1 : 2

  मूल्यों का अनुपात = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

  इस प्रकार सेब के भारों का अनुपात = मूल्यों का अनुपात

  क्योंकि दोनों अनुपात समान हैं अतः हम कह सकते हैं कि ये समानुपात में हैं। वे दोनों समान मूल्यों पर सेब बेच रहे हैं।

यदि दो अनुपात एक समान हैं तो वे समानुपात में हैं और इन्हें समान करने के लिए '::' चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

पहले उदाहरण के लिए हम कह सकते हैं कि 3, 10, 15 और 50 समानुपात में हैं जिसे हम 3 : 10 :: 15 : 50 रूप में भी लिख सकते हैं और 3 अनुपात 10 बराबर 15 अनुपात 50 पढ़ेंगे।

दूसरे उदाहरण में 2, 4, 60 और 120 समानुपात में है जिसे हम 2 : 4 :: 60 : 120 लिखेगें और 2 अनुपात 4 बराबर 60 अनुपात 120 पढ़ेंगे।

आइए अन्य उदाहरण लें :

एक व्यक्ति 2 घंटे में 35 किमी चलता है। क्या इसी चाल से वह 4 घंटे में 70 किमी चल सकता है?

दोनों द्वारा चली गई दूरियों का अनुपात = 35 : 70 = 1 : 2

दोनों द्वारा लिए गए समय का अनुपात 2 : 4 = 1 : 2

इस प्रकार दोनों अनुपात समान हैं अर्थात् 35 : 70 = 2 : 4

अतः हम कह सकते हैं कि चारों संख्याएँ 35, 70, 2 और 4 समानुपात में हैं।

इस प्रकार हम लिख सकते हैं 35 : 70 :: 2 : 4 और इसे पढ़ सकते हैं 35 अनुपात 70 बराबर 2 अनुपात 4। अतः वह 4 घंटे में 70 किमी उसी चाल से चल सकता है।

अब इस उदाहरण को लें :

2 किग्रा सेब का मूल्य 60 रु है और 5 किग्रा तरबूज का मूल्य 15 रु है।

दोनों के वजनों का अनुपात 2 : 5 है।

दोनों के मूल्यों का अनुपात = 60 : 15 = 4 : 1

यहाँ 2 : 5 और 60 : 15 समान नहीं हैं।

अर्थात् 2 : 5 ≠ 60 : 15

इस प्रकार चारों राशियाँ 2, 5, 60 और 15 समानुपात में नहीं हैं।

यदि दो अनुपात समान नहीं होते हैं तो वे राशियाँ समानुपात में नहीं होती हैं।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि दिए गए अनुपात समान हैं अर्थात् वे समानुपात में हैं। यदि हाँ, तो उन्हें सही ढंग से लिखिए।

1. 1 : 5 और 3 : 15
2. 2 : 9 और 18 : 81
3. 15 : 45 और 5 : 25
4. 4 : 12 और 9 : 27
5. 10 रु का 15 रु और 4 का 6 से

समानुपात के कथन में, क्रम में ली गई चारों राशियाँ पद कहलाती हैं। पहले और चौथे पद को चरम पद कहते हैं। दूसरे और तीसरे पद को मध्य पद कहते हैं।

उदाहरण के लिए 35 : 70 : : 2 : 4

35, 70, 2 और 4 चार पद हैं। जिसमें से 35 तथा 4 चरम पद हैं और 70 तथा 2 मध्य पद हैं।

उदाहरण 8 : क्या अनुपात 25 ग्रा : 30 ग्रा और 40 किग्रा : 48 किग्रा समानुपात में है?

हल :

25 ग्रा : 30 ग्रा $= \frac{25}{30} = 5 : 6$

40 किग्रा : 48 किग्रा $= \frac{40}{48} = 5 : 6$

इसलिए, $25 : 30 = 40 : 48$

अतः अनुपात 25 ग्रा : 30 ग्रा और 40 किग्रा : 48 किग्रा समानुपात में हैं अर्थात् 25 : 30 :: 40 : 48

इसमें 25, 48 चरम पद हैं और 30, 40 मध्य पद हैं।

उदाहरण 9 : क्या 30, 40, 45 और 60 समानुपात में हैं?

हल :

30 और 40 का अनुपात $= \frac{30}{40} = 3 : 4$

45 और 60 अनुपात $= \frac{45}{60} = 3 : 4$

क्योंकि $30 : 40 = 45 : 60$

अतः, 30, 40, 45, 60 समानुपात में हैं।

उदाहरण 10 : क्या 15 सेमी का 2 सेमी से और 10 सेकंड का 3 मिनट से अनुपात, समानुपात में हैं?

हल :

15 सेमी का 2 मी से अनुपात

$= 15 : 2 \times 100$ (1 मी = 100 सेमी)

$= 3 : 40$

10 सेकंड का 3 मिनट से अनुपात

$= 10 : 3 \times 60$ (1 मिनट = 60 सेकंड)

$= 1 : 18$

क्योंकि $3 : 40 \neq 1 : 18$, अतः दिए हुए अनुपात, समानुपात में नहीं हैं।

प्रश्नावली 12.2

1. क्या निम्न राशियाँ समानुपात में हैं :
   (a) 15, 45, 40, 120 (b) 33, 121, 9,96
   (c) 24, 28, 36, 48 (d) 32, 48, 70, 210
   (e) 4, 6, 8, 12 (f) 33, 44, 75, 100
2. निम्न में से प्रत्येक कथनों के आगे सत्य या असत्य लिखिए :
   (a) 16 : 24 :: 20 : 30 (b) 21: 6 :: 35 : 10
   (c) 12 : 18 :: 28 : 12 (d) 8 : 9 :: 24 : 27
   (e) 5.2 : 3.9 :: 3 : 4 (f) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4
3. क्या निम्न कथन सही हैं?
   (a) 40 व्यक्ति : 200 व्यक्ति = 15 रु : 75 रु
   (b) 7.5 लि : 15 लि = 5 किग्रा : 10 किग्रा
   (c) 99 किग्रा : 45 किग्रा = 44 रु : 20 रु
   (d) 32 मी : 64 मी = 6 सेकंड : 12 सेकंड
   (e) 45 किमी : 60 किमी = 12 घंटे : 15 घंटे
4. जाँचिए कि क्या निम्न अनुपात, समानुपात बनाते हैं। यदि समानुपात बनता हो, तो मध्य मद और चरम पर भी लिखिए
   (a) 25 सेमी : 1 मी और 40 रु : 160 रु
   (b) 39 लि : 65 लि और 6 बोतल : 10 बोतल
   (c) 2 किग्रा : 80 किग्रा और 25 ग्रा : 625 ग्रा
   (d) 200 मिलि : 2.5 लि और 4 रु : 50 रु

12.4 ऐकिक विधि

निम्न परिस्थितियों को लें :

- दो सहेलियाँ रेशमा और सीमा बाज़ार से अभ्यास पुस्तिका खरीदने जाती हैं। रेशमा ने 24 रु में 2 अभ्यास पुस्तिका खरीदीं। एक अभ्यास पुस्तिका का मूल्य ज्ञात कीजिए?

- 80 किमी की दूरी तय करने में एक स्कूटर में 2 लीटर पेट्रोल लगता है। एक किमी चलने के लिए कितना पेट्रोल लगेगा?

ये उदाहरण हमारी दैनिक जीवन की समस्याओं पर आधारित हैं। आप इन्हें कैसे हल करेंगे?

पहले उदाहरण को पुनः लें

2 अभ्यास पुस्तिकाओं का मूल्य = 24 रु

अतः 1 अभ्यास पुस्तिका का मूल्य = 24 रु ÷ 2 = 12 रु

यदि आपको 5 ऐसी अभ्यास पुस्तिकाओं का मूल्य ज्ञात करने के लिए कहा जाए तो यह इस प्रकार होगा

12 रु + 12 रु + 12 रु + 12 रु + 12 रु = 12 रु × 5 = 60 रु

दूसरे उदाहरण को भी पुनः लें

हम जानना चाहते हैं कि एक किमी जाने में कितना पेट्रोल लगेगा?

80 किमी चलने के लिए पेट्रोल लगता है = 2 लीटर

1 किमी चलने के लिए पेट्रोल लगता है $= \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$ लीटर

अब यदि आपसे पूछा जाए कि 120 किमी जाने में कितना पेट्रोल लगेगा

तब आवश्यक पेट्रोल की मात्रा $= \frac{1}{40} \times 120$ लीटर $= 3$ लीटर

वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते हैं और फिर जितनी इकाइयों का मान निकालने को कहा जाए, निकालते हैं, वह ऐकिक विधि कहलाती है।

हम देखते हैं कि

प्रयास कीजिए

1. पाँच ऐसी ही समस्याएँ बनाएं और अपने मित्रों से हल करवाएं।
2. निम्न सारणी को पढ़कर पूरा करें।

समय	करन द्वारा तय की गई दूरी	कृति द्वारा तय की गई दूरी
2 घंटे	8 किमी	6 किमी
1 घंटा	4 किमी	☐
4 घंटे	☐	☐

हम देखते हैं कि

करन द्वारा 2 घंटे में तय की गई दूरी = 8 किमी

करन द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{8}{2}$ किमी = 4 किमी

अतः, करन द्वारा 4 घंटों में तय की गई दूरी $= 4 \times 4 = 16$ किमी

इसी प्रकार कृति द्वारा 4 घंटों में तय की गई दूरी, एक घंटे में तय की गई दूरी निकालकर ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 11 : यदि 6 जूस की केन का मूल्य 210 रु हो तो 4 केन का मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल : जूस की 6 केन का मूल्य = 210 रु

अतः, जूस की 1 केन का मूल्य $= \frac{210}{6} = 35$ रु

अतः, जूस की 4 केन का मूल्य = 35 रु × 4 = 140 रु

इस प्रकार जूस की 4 केन का मूल्य 140 रु होगा।

उदाहरण 12 : एक मोटर साइकिल से 220 किमी दूरी तय करने पर 5 लीटर पेट्रोल लगता है तो 1.5 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय की जाएगी?

हल : 5 लीटर में मोटर साइकिल द्वारा तय की गई दूरी 220 किमी

1 लीटर में मोटर साइकिल द्वारा तय की गई दूरी $\frac{220}{5}$ किमी

1.5 लीटर में मोटर साइकिल द्वारा तय की गई दूरी $\frac{220}{5} \times 1.5$ किमी

$= \frac{220}{5} \times \frac{15}{10}$ किमी = 66 किमी



अतः, 1.5 लीटर पेट्रोल में 66 किमी की दूरी तय की जा सकती है।

उदाहरण 13 : एक दर्जन साबुन की टिक्कियों का मूल्य 153.60 रु है। ऐसी ही 15 साबुन की टिक्कियों का मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल : हम जानते हैं कि 1 दर्जन = 12

क्योंकि 12 साबुन की टिक्कियों का मूल्य = 153.60 रु

अतः, 1 साबुन की टिक्की का मूल्य $= \frac{153.60}{12} = 12.80$ रु

अतः, 15 साबुन की टिक्कियों का मूल्य = 12.80 रु × 15 = 192 रु

इस प्रकार, 15 साबुन की टिक्कियों का मूल्य = 192 रु

उदाहरण 14 : 105 लिफाफों का मूल्य 35 रु है। 15 रु में कितने लिफाफे खरीदे जा सकते हैं?

हल : 35 रु में खरीदे जा सकने वाले लिफाफों की संख्या = 105

अतः, 1 रु में खरीदे जा सकने वाले लिफाफों की संख्या $= \frac{105}{35}$

अतः, 10 रु में खरीदे जा सकने वाले लिफाफों की संख्या

$= \frac{105}{35} \times 10 = 30$

इस प्रकार 10 रु में 30 लिफाफे खरीदे जा सकते हैं।

उदाहरण 15 : एक कार $2\frac{1}{2}$ घंटों में 90 किमी चल सकती है।

(a) उसी चाल से 30 किमी दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?

(b) उसी चाल से 2 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?

(a) पहली स्थिति में दूरी ज्ञात है और समय अज्ञात है। अतः हम इस तरह करेंगें :

$2\frac{1}{2}$ घंटे = $\frac{5}{2}$ घंटे = $\frac{5}{2} \times 60$ मिनट = 150 मिनट

90 किमी की दूरी तय करने में समय लगा = 150 मिनट

अतः, 1 किमी की दूरी तय करने में समय लगा $\frac{150}{90}$ मिनट

अतः, 30 किमी की दूरी तय करने में समय लगा $\frac{150}{90} \times 30$ मिनट

= 50 मिनट

इस प्रकार 30 किमी की दूरी तय करने में 50 मिनट लगेंगे।

(b) इस दूसरी स्थिति में दूरी अज्ञात है और समय ज्ञात है। अतः इस प्रकार आगे बढ़ेगे :

$2\frac{1}{2}$ घंटे = $\frac{5}{2}$ घंटे

$\frac{5}{2}$ घंटों में तय की गई दूरी = 90 किमी

अतः, 1 घंटे में तय की गई दूरी = $90 \div \frac{5}{2}$ किमी

= $90 \times \frac{2}{5}$ = 36 किमी

अतः, 2 घंटों में तय की गई दूरी = 36×2 = 72 किमी

इस प्रकार 2 घंटे में 72 किमी की दूरी तय की गई।

प्रश्नावली 12.3

1. यदि 7 मी कपड़े का मूल्य 294 रु हो तो 5 मी कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए?
2. एकता 10 दिन में 1500 रु अर्जित करती है। 30 दिन में वह कितना अर्जित करेगी?

3. यदि पिछले 3 दिन में 276 मिमी वर्षा होती है, तो एक सप्ताह (7 दिन) में कितने सेमी वर्षा होगी? यह मानते हुए कि वर्षा उसी गति से हो रही है।

4. 5 किग्रा गेहूँ का मूल्य 30.50 रु है

   (a) 8 किग्रा गेहूँ का मूल्य क्या होगा?

   (b) 61 रु में कितना गेहूँ खरीदा जा सकता है?

5. पिछले 30 दिन में तापमान $15°$ सेल्सियस गिरता है। यदि तापमान की गिरावट इसी गति से जारी रहे तो, अगले 10 दिन में तापमान कितने डिग्री गिरेगा?

6. शाइना 3 महीने का किराया 7500 रु देती है। उसे पूरे वर्ष का किराया कितना देना होगा। यदि वर्ष भर किराया समान रहे?

7. 4 दर्जन केले का मूल्य 60 रु है। 12.50 रु में कितने केले खरीदे जा सकते हैं।

8. 72 पुस्तकों का भार 9 किग्रा है। ऐसी 40 पुस्तकों का भार कितना होगा?

9. एक ट्रक में 594 किमी चलने पर 108 लीटर डीजल लगता है। 1650 किमी की दूरी तय करने में कितने लीटर डीजल लगेगा?

10. राजू ने 150 रु में 10 पेन और मनीष ने 84 रु में 7 पेन खरीदे। ज्ञात कीजिए किसने पेन सस्ते खरीदे?

11. अनीश ने 6 ओवर में 42 रन बनाए और अनूप ने 7 ओवर में 63 रन बनाए। एक ओवर में किसने अधिक रन बनाए?

हमने क्या चर्चा की?

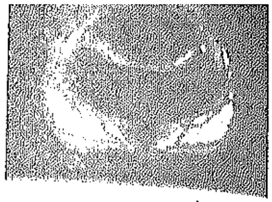
1. एक जैसी राशियों की तुलना करने के लिए हम साधारणतः राशियों के अंतर द्वारा तुलना विधि प्रयोग करते हैं।

2. बहुत सी परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना अधिक अच्छी होती है। अर्थात् एक राशि दूसरी राशि का कितना गुना है। इस विधि को भाग द्वारा तुलना कहते हैं।

   उदाहरण के लिए ईशा का वजन 25 किग्रा है और उसके पिता का वजन 75 किग्रा है। हम कहेगें कि ईशा के पिता के वजन का ईशा के वजन के साथ अनुपात 3 : 1 है।

3. अनुपात द्वारा तुलना में, दोनों राशियों की इकाइयाँ समान होनी चाहिए। यदि वे समान नहीं हैं तो अनुपात लेने से पहले उन्हें समान बना लेना चाहिए।

4. अलग-अलग परिस्थितियों में अनुपात समान हो सकता है।
5. अनुपात 3 : 2 और 2 : 3 एक दूसरे से भिन्न हैं। इस प्रकार जिस क्रम में राशियाँ ली गई हैं वह महत्त्वपूर्ण है।
6. एक अनुपात को भिन्न भी माना जा सकता है, अतः $10 : 3 = \frac{10}{3}$
7. दो अनुपात तुल्य होगें, यदि उनकी संगत भिन्न भी तुल्य हों। अतः 3 : 2 तुल्य है 6 : 4 या 12 : 8 के।
8. एक अनुपात को न्यूनतम रूप में बदला जा सकता है। उदाहरण के लिए अनुपात 50 : 15 को $\frac{50}{15}$ भी लिख सकते हैं और न्यूनतम रूप में $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ है। इस प्रकार न्यूनतम रूप में 50 : 15 = 10 : 3
9. चार राशियाँ समानुपात में कहलाएंगी, यदि पहली और दूसरी राशि का अनुपात, तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के बराबर हो। इस प्रकार 3, 10, 15, 50 समानुपात में है क्योंकि $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$ है। हम समानुपात को 3 : 10 :: 15 : 50 के रूप में दर्शाते हैं और 3 अनुपात 10 बराबर 15 अनुपात 50 के रूप में पढ़ते हैं। ऊपर लिखे समानुपात में 3 और 50 चरम पद हैं तथा 10 और 15 मध्य पद हैं।
10. समानुपात में क्रम महत्वपूर्ण है। 3, 10, 15 और 50 समानुपात में हैं लेकिन 3, 10, 50 और 15 नहीं हैं क्योंकि $\frac{3}{10} \neq \frac{50}{15}$
11. वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते हैं और फिर वांछित इकाइयों का मान निकालते हैं, इकाई विधि कहलाती है। माना कि 6 केन का मूल्य 210 रु है। 4 केन का मूल्य इकाई विधि से ज्ञात करने के लिए हम पहले 1 केन का मूल्य ज्ञात करेगें जो कि $\frac{210}{6}$ रु या 35 रु होगा। इसी से हम 4 केन का मूल्य 35 रु × 4 या 140 रु निकालेंगे।

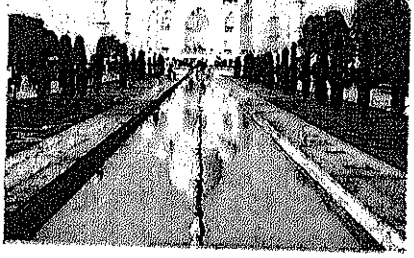


अध्याय 13

सममिति

13.1 भूमिका

सममिति हमारे दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाला एक आम शब्द है। जब हम ऐसे आकृतिों या आकृतियों को देखते हैं जो बराबर संतुलित अनुपात में हों तब हम कहते हैं, **"ये आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।"**



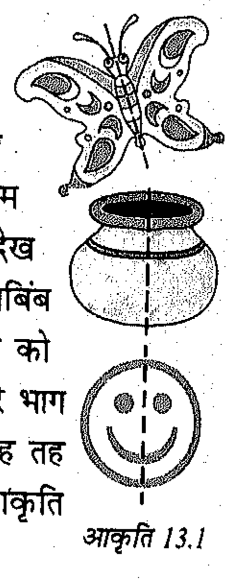
ताजमहल (उ.प्र.)



तिरूवन्नामलाई (तमिलनाडु)

अपनी सममित बनावट के कारण इन पुरातत्वीय आकृतियों ने अद्‌भुत स्थापत्य बना रखा है।

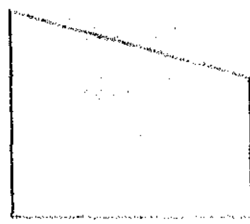
कल्पना कीजिए हम एक आकृति को आधे (अर्ध) से इस तरह मोड़े कि उसका आधा बायाँ भाग तथा आधा दायाँ भाग एक दूसरे से पूर्णतया मिलता जुलता हो तब हम कहेगें कि आकृति में सममित रेखा उपस्थित है। हम देख सकते हैं कि दोनों आधे भाग एक दूसरे के (दर्पण) प्रतिबिंब हैं। यदि हम आकृति के मोड़ने वाले स्थान पर एक दर्पण को रख देते हैं तो आकृति के एक भाग का प्रतिबिंब के दूसरे भाग को पूर्णतया ढ़क लेगा। ऐसा जब भी घटित होता है तो यह तह या मोड़ (वास्तविक या काल्पनिक), जो दर्पण रेखा है, आकृति की सममिति रेखा (या सममित अक्ष) कहलाती है।



आकृति 13.1

यहाँ पर आप जो भी आकृतियाँ या आकार देख रहे हैं वे सभी आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं। क्यों?

जब आप इन्हें बिंदुकित रेखा की तरफ से मोड़ते हैं तो आकृति का एक आधा भाग, दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढ़क लेता है। इस आकृति में आप बिंदु अंकित रेखा को क्या नाम देंगे? आकृति में दर्पण को किस जगह पर रखेंगे जिससे कि प्रतिबिंब आकृति के दूसरे भाग को पूर्णतया ढ़क ले?



आकृति 13.2

आकृति 13.2 एक सममित आकृति नहीं है।

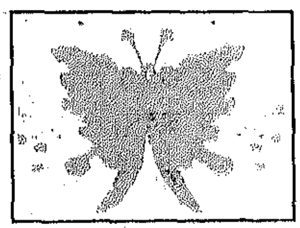
क्या बता सकते हैं, क्यों नहीं?

13.2 सममित आकृतियाँ बनाना : इंक ब्लाट डेविल्स

इन्हें कीजिए

कागज़ का एक टुकड़ा लीजिए। इसे आधे भाग से मोड़िए।

स्याही की कुछ बूंदों को आधे भाग पर डालिए।



अब दोनों आधे भागों को दबाइए।

आप क्या देखते हैं?

क्या प्राप्त आकृति सममित आकृति है? यदि हाँ, तो बताइए सममित रेखा कहाँ है। क्या ऐसी कोई अन्य रेखा भी है जहाँ से मोड़ने पर दो समान भाग प्राप्त हो सकते हों? ऐसे ही कुछ और प्रतिरूपों का प्रयास कीजिए।

स्याही धागा प्रतिरूप





एक कागज़ को आधे भाग से मोड़िए। उनमें से एक आधे भाग पर कम लंबाई के धागों को अलग-अलग स्याही या पेंट में डुबोकर व्यवस्थित कीजिए। अब दोनों आधे भागों को इकट्ठे दबाइए। प्राप्त आकृति का अध्ययन कीजिए। क्या यह एक सममित आकृति है? इसे और कितने तरीकों से मोड़ा जा सकता है जिससे दो समान भाग प्राप्त हो सकें?

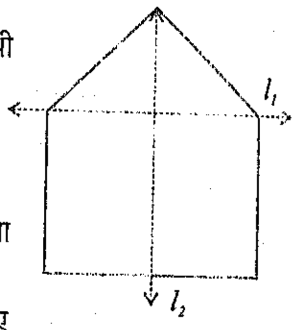
प्रयास कीजिए

आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। क्या ये सममित हैं?

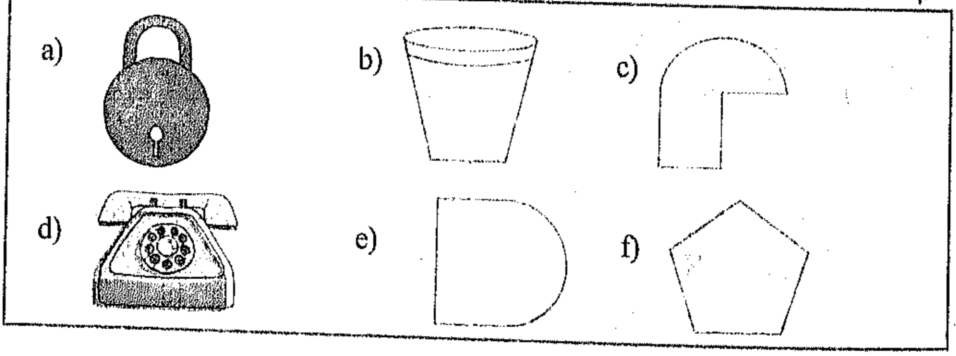
अपनी कक्षा में उपलब्ध कुछ वस्तुओं की सूची बनाइए जैसे श्यामपट्ट (black board), मेज, दीवार, पाठ्यपुस्तक इत्यादि। इनमें से कौन सी वस्तुएँ सममित हैं और कौन सी सममित नहीं हैं? क्या आप उन में से सममित वस्तुओं की सममित रेखा पहचान सकते हैं।

प्रश्नावली 13.1

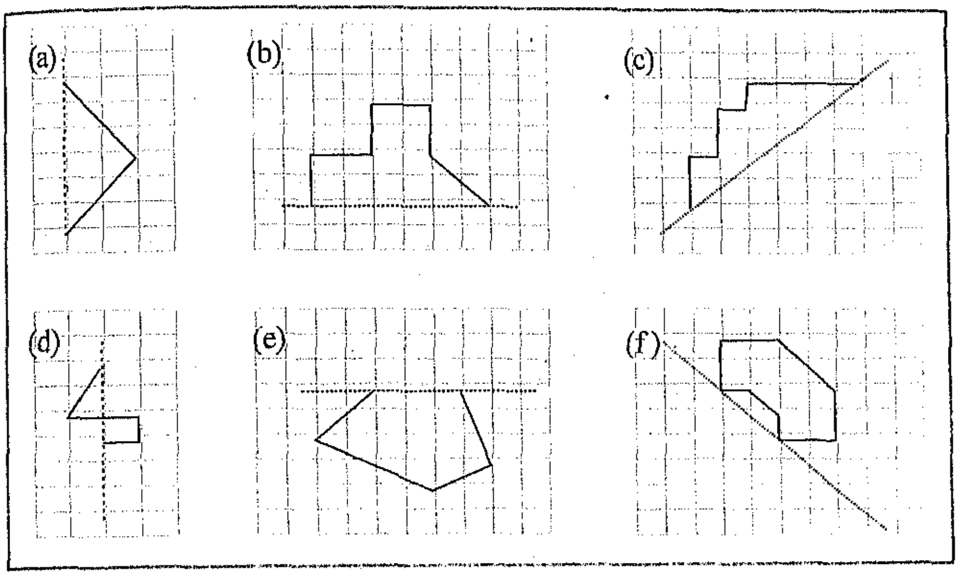
1. अपने घर अथवा विद्यालय की ऐसी चार वस्तुओं की सूची बनाइए जो सममित हों।



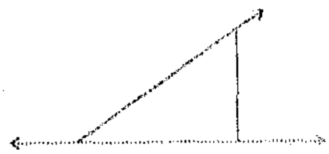
2. दी गई आकृति में कौन सी दर्पण रेखा अर्थात् सममित रेखा है l_1 या l_2?
3. नीचे दी गई आकृतियों की पहचान कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या ये आकृतियाँ सममित हैं या नहीं। उनकी सममिति की रेखा भी खींचिए।



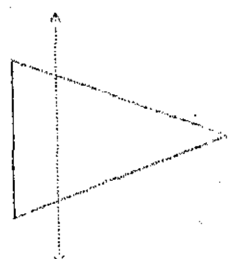
4. नीचे दी गई आकृतियों को वर्गांकित पेपर पर बनाइए। आपने वर्गांकित पेपर का प्रयोग अपनी पिछली कक्षाओं में अंकगणित नोट बुक में किया होगा। इन आकृतियों को इस तरह पूरा कीजिए कि बिंदुकित रेखा ही सममित रेखा हो।



5. नीचे दी गई आकृति में, l सममिति की रेखा है। इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे यह सममित हो जाए।



6. आकृति में, l सममिति की रेखा है।
त्रिभुज का प्रतिबिंब खींचिए और इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे यह सममित हो जाए।



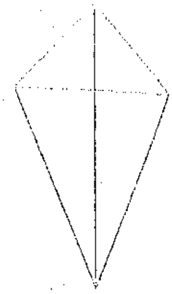
13.3 आकृतियाँ जिनमें दो सममित रेखाएँ हों

इन्हें कीजिए

एक पतंग

आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वेयर में से एक के कोणों की माप 30°, 60° और 90° है।

ऐसे ही दो समान सेट स्क्वेयर लीजिए। उन्हें आपस में मिलाकर रखिए और एक पतंग बनाइए जैसा आकृति में दिखाया गया है।

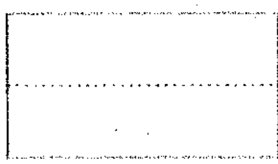


इस आकृति में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं? क्या आप सोचते हैं कि कुछ आकृतियों में एक से अधिक सममित रेखाएँ होती हैं।

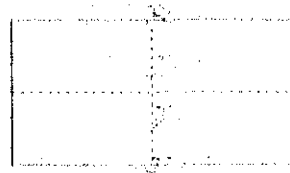
एक आयत

एक आयताकार कागज़ लीजिए (जैसे डाक-लिफाफा)। इसे एक बार लंबाई की ओर मोड़िए जिससे कि एक आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढ़क लें। क्या यह मोड़ एक सममिति की रेखा है। क्यों?

इसे खोलिए और पुनः एक बार चौड़ाई की ओर से समान तरीके से मोड़िए। क्या यह दूसरा मोड़ भी सममिति की रेखा है? क्यों?



पहला मोड़



दूसरा मोड़

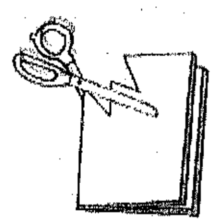
क्या आपको लगता है कि ये दो रेखाएँ, सममिति की रेखाएँ हैं?

प्रयास कीजिए

दो या अधिक सेट स्क्वेयर को मिलाकर आप जितनी भी आकृतियाँ बना सकते हैं, बनाइए? इन्हें वर्गांकित कागज़ पर बनाइए और सममित रेखा बताइए।

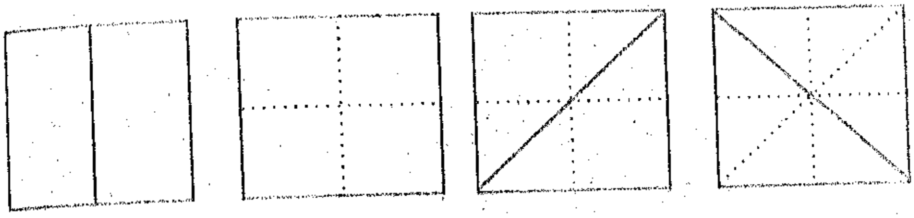
तो तहों वाले कागज़ से काटी गई आकृति

एक आयताकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए। इसे एक बार मोड़िए और पुनः एक बार मोड़िए। कुछ डिजाइन बनाइए जैसा कि दिखाया गया है। जो आकृति बनाई गई है उसे काटिए और खोलिए (खोलने से पहले उस आकृति का अनुमान लगाइए जिसे आप प्राप्त करेगें)।

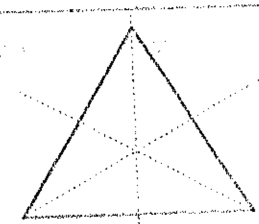


जिस आकृति को काटा गया है उसमें कितनी सममिति की रेखाएँ हैं? ऐसी कुछ और डिजाइनों को बनाइए।

13.4 अनेक सममित रेखाओं (दो से अधिक) वाली आकृतियाँ



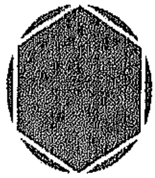
एक वर्गाकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए। इसे ऊर्ध्वाधर (vertically) में आधे से मोड़िए और पुनः क्षैतिज (horizontally) से आधे भाग से मोड़िए (अर्थात् आपने इसे दो बार मोड़ा)। इसे खोलिए और पुनः वर्ग को आधे भाग से मोड़िए (यानि तीसरी बार), लेकिन इस बार विकर्ण के साथ-साथ जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इसे पुनः खोलिए और आधे भाग से मोड़िए (चौथी बार), लेकिन इस बार दूसरे विकर्ण के साथ-साथ जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इसे खोलिए। इस आकृति में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं? कुछ आकृतियों में केवल एक ही सममिति की रेखा होती है, कुछ में दो, और कुछ में तीन या अधिक सममिति की रेखाएँ होती हैं। क्या आप एक ऐसी आकृति को सोच सकते हैं जिसमें 6 सममिति की रेखाएँ हों?

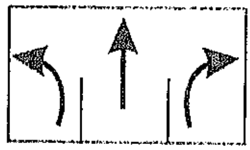


समबाहु त्रिभुज की 3 सममित रेखाएँ

सममिति, सममित प्रत्येक स्थान पर

- आप प्रतिदिन ऐसे बहुत से मार्गसूचक संकेत या



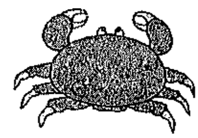


चिह्न देखते हैं जिनमें सममिति की रेखाएँ होती हैं। यहाँ पर ऐसे ही कुछ चिह्न (संकेत) दिए गए हैं: ऐसे ही कुछ और मार्गसूचक संकेतों को पहचानो और उन्हें बनाओ। सममिति की रेखाओं को इंगित करना मत भूलिए

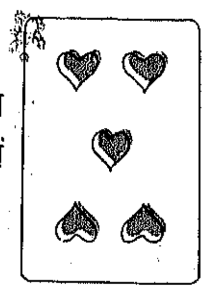
- प्रकृति में बहुत सी वस्तुएँ ऐसी हैं जिनकी आकृतियाँ सममित हैं। इन्हें देखिए :

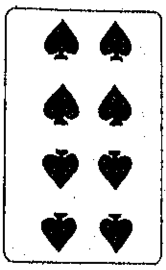




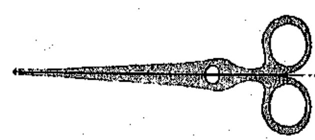


- ताश के कुछ पत्तों के डिजाइन में सममिति की रेखाएँ होती हैं। दिए गए ताश के पत्तों में उन्हें पहचानिए।

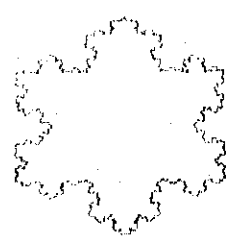




- यहाँ एक कैंची का युग्म है!
इसमें कितनी सममिति की रेखाएँ हैं?

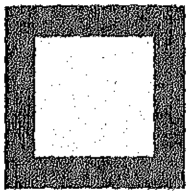


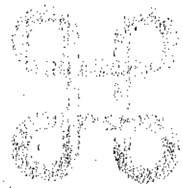
- इस सुंदर आकृति का निरीक्षण कीजिए
यह एक सममित पैटर्न हैं जो कि कोच स्नोफलेक (koch's Snowflake) के नाम से जाना जाता है। (यदि आपके पास कंप्यूटर है तो आप फ्रेक्टल (Fractals) विषय पर ब्राऊस कीजिए और आपको ऐसी बहुत सुंदर आकृतियाँ देखने को मिलेंगी।) इन आकृतियों में सममित की रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

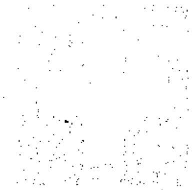


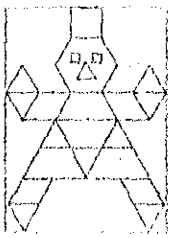
प्रश्नावली 13.2

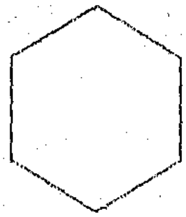
1. नीचे दी गई आकृतियों में प्रत्येक की सममित रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

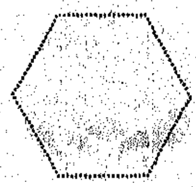
(a)


(b)


(c)


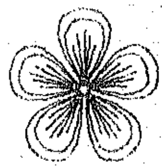
(d)


(e)


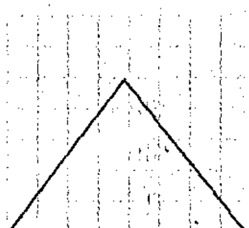
(f)


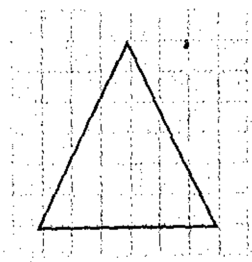
(g)


(h)

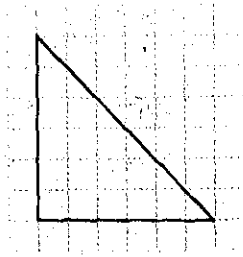

(i)


2. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में त्रिभुज को एक वर्गांकित पेपर पर बनाइए। प्रत्येक में सममिति की रेखा (रेखाओं) को यदि है तो उन्हें खींचिए और त्रिभुज के प्रकार को पहचानिए। (आप उनमें से कुछ आकृतियों का अनुरेख (trace) करना पसंद कर सकते हैं। पहले पेपर को मोड़ने वाली विधि द्वारा प्रयास करें)

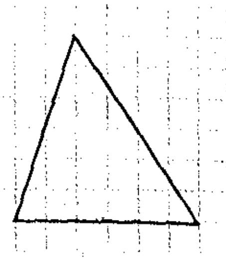
(a)


(b)


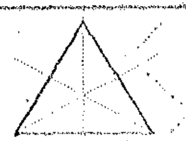
(c)



(d)



3. निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

आकार	आकृति खाका या रूपरेखा	सममिति की रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज		3
वर्ग		
आयत		
समद्विबाहु त्रिभुज		
समचतुर्भुज		
वृत्त		

4. क्या आप एक ऐसा त्रिभुज बना सकते हो जिसमें
   (a) केवल एक ही सममित रेखा हो?
   (b) केवल दो ही सममित रेखाएँ हों?
   (c) केवल तीन ही सममित रेखाएँ हों?
   (d) कोई सममित रेखा न हो?
   प्रत्येक में आकृति की रूपरेखा (खाका) बनाइए।
5. एक वर्गांकित पेपर पर निम्न की रूपरेखा बनाइए :
   (संकेत : आपके लिए सहायक होगा यदि आप पहले सममिति की रेखा खीचें और उसके बाद आकृति को पूरा करें)

(a) एक त्रिभुज जिसमें क्षैतिज सममित रेखा तो हो परंतु ऊर्ध्वाधर सममित रेखा न हो।

(b) एक चतुर्भुज जिसमें क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दोनों ही सममित की रेखा हों।

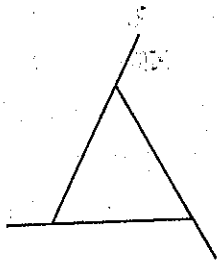
(c) एक चतुर्भुज जिसमें क्षैतिज सममित रेखा तो हो परंतु ऊर्ध्वाधर सममित रेखा न हो।

(d) एक षट्भुज जिसमें केवल दो ही सममित रेखाएँ हों।

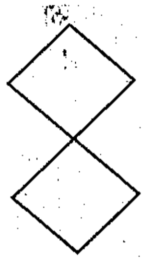
(e) एक षट्भुज जिसमें 6 सममित रेखाएँ हों।

6. प्रत्येक आकृति का अनुरेखण (ट्रेस) कीजिए और सममिति की रेखाओं (सममित रेखा) को खींचिए।

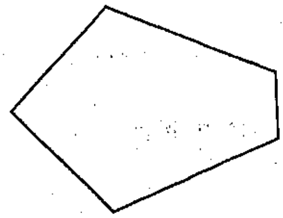
(a)



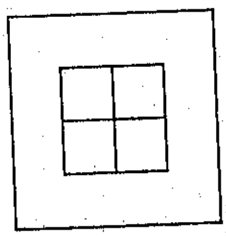
(b)



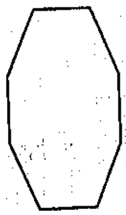
(c)



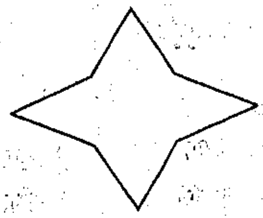
(d)



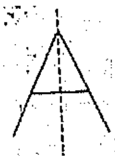
(e)



(f)



7. अंग्रेजी वर्णमाला के A से Z तक के सभी अक्षरों पर विचार कीजिए। इनमें से उन अक्षरों की सूची बनाइए जिनमें

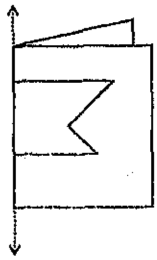


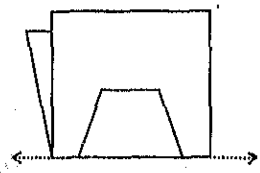
(a) उर्ध्वाधर सममिति की रेखाएँ हों (जैसा कि A)

(b) क्षैतिज सममिति की रेखाएँ हों (जैसा कि B)

(c) सममिति की रेखाएँ न हों (जैसा कि Q)

8. यहाँ पर कुछ मुड़ी हुई शीट की आकृतियाँ दी गई हैं जिनकी तह पर आकृतियाँ बनाई गई हैं। प्रत्येक में पूर्ण आकृति की रूपरेखा खींचिए जो डिजाइन के काटने के बाद दिखाई देगी।

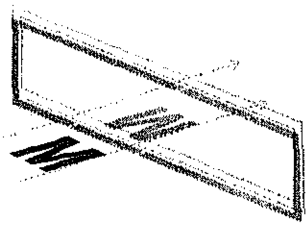


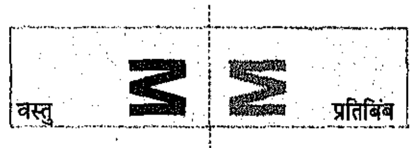


5.3.3 प्रतिबिंब और सममिति

सममित रेखा और दर्पण प्रतिबिंब एक दूसरे से प्राकृतिक तौर पर संबंधित हैं।

यहाँ एक आकृति दी गई है जिसमें अंग्रेजी अक्षर M का प्रतिबिंब दिखाया गया है। आप कल्पना कर सकते हैं कि दर्पण अदृश्य है और आप केवल अक्षर M तथा इसकी छाया या प्रतिबिंब को देख सकते हैं।





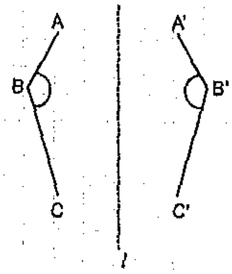


वस्तु और उसका प्रतिबिंब दर्पण रेखा के संदर्भ में सममित है। जब एक पेपर को मोड़ा जाता है तो दर्पण रेखा, सममिति की रेखा बन जाती है। तब हम कहते हैं कि छाया, दर्पण रेखा में वस्तु का प्रतिबिंब है। आप यह भी देख सकते हैं कि जब वस्तु परावर्तित होती है तो उसकी लंबाई और कोणों में बिल्कुल भी परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् वस्तु की लंबाई और कोण तथा छाया की संगत लंबाई और कोण समान होते हैं। यद्यपि एक तरह से परिवर्तन होता है अर्थात् जैसे एक वस्तु तथा उसकी छाया में अंतर होता है। क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि अंतर क्या है?

(संकेत : अपने आपको दर्पण में देखिए)

इन्हें कीजिए

एक वर्गांकित कागज़ पर एक आकृति ABC बनाइए और इसका प्रतिबिंब A'B'C' दर्पण रेखा *l* में ज्ञात कीजिए।



AB और A'B'; BC और B'C'; AC और A'C' की लंबाईयों की तुलना कीजिए।

क्या ये अलग हैं?

क्या प्रतिबिंब एक रेखाखंड की लंबाई में परिवर्तन करता है? ABC और A'B'C' कोणों की माप की तुलना कीजिए (कोण मापक की सहायता से मापिए) क्या प्रतिबिंब, कोण के आकार को बदल देता है।

AA', BB' और CC' को मिलाइए। कोण मापक की सहायता से *l* और *AA'*, *l* और *BB'*, *l* और *CC'* के बीच बने कोणों को मापिए।

दर्पण रेखा *l* और किसी बिंदु और इसके प्रतिबिंब को मिलाने से बने रेखाखंड के बीच बने कोण के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

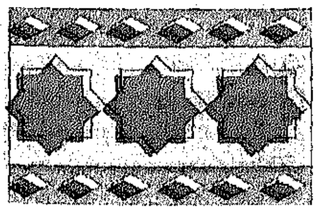
प्रयास कीजिए

यदि आप दर्पण के सामने 100 सेमी की दूरी पर हैं। आपका प्रतिबिंब कहाँ होगा?

यदि आप दर्पण की ओर चलते हैं तो आपका प्रतिबिंब किस प्रकार चलता है?

इन्हें कीजिए

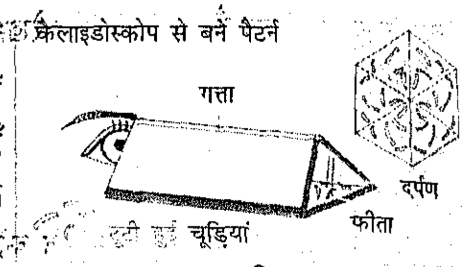
कागज़ों द्वारा सजावट



एक पतला आयताकार रंगीन कागज़ लीजिए। इसे कई बार मोड़िए और कागज़ में कुछ जटिल प्रतिरूप बनाइए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। बार-बार आने वाले डिजाइनों में सममिति की रेखाओं की पहचान कीजिए। ऐसे सजावटी कर्तित कागज़ों का प्रयोग त्यौहारों के अवसरों पर कीजिए।

कैलाइडोस्कोप

अनेक दर्पणों वाले एक केलाइडोस्कोप में कई प्रतिबिंब बनते हैं जिनमें अनेकों सममिति की रेखाएँ होती हैं (जैसा यहाँ उदाहरण में दिखाया गया है)। प्रायः दो दर्पण पट्टियों को V आकार में रखकर प्रयोग किया जाता है। दर्पणों के बीच बने कोण सममिति की रेखाओं या सममित रेखाओं की संख्या को बताते हैं।

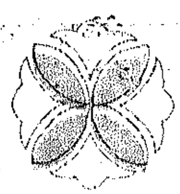


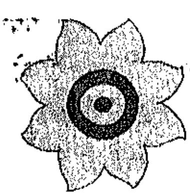
आकृति 13.1

एक केलाइडोस्कोप बनाइए और इसके द्वारा बनाई गई सममित आकृतियों की कुछ और जानकारी प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

एलबम

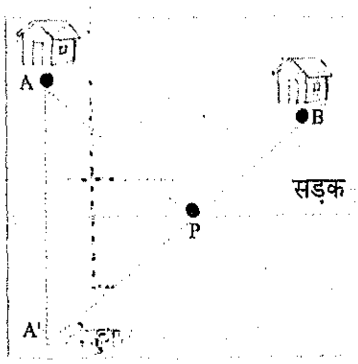
सममित डिजाइनों को एकत्रित करके एक एलबम तैयार कीजिए। यहाँ पर कुछ नमूने दिए गए हैं।





परावर्त्तीय सममिति का उपयोग

एक अखबार बाँटने वाला लड़का अपनी साईकिल को किसी बिंदु 'P' पर खड़ा करता है और अखबार A और B घरों में बाँटता है। उसे अपनी साईकिल को कहाँ पर खड़ा करना चाहिए जिससे AP + BP दूरी सबसे कम हो।

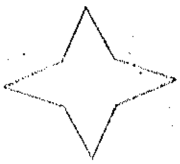


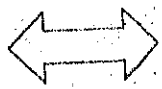
आप यहाँ पर परावर्तीय सममिति का प्रयोग कर सकते हैं। मार्ग को दर्पण रेखा लेने पर, माना A का

प्रतिबिंब A' प्राप्त होता है। तब हम कहेंगे कि बिंदु P साईकिल को खड़ा करने के लिए उपयुक्त स्थान है। (जहाँ दर्पण रेखा A'B को काटती है)। क्या आप कह सकते हैं क्यों?

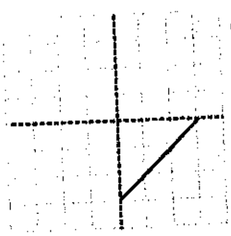
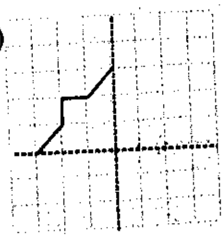
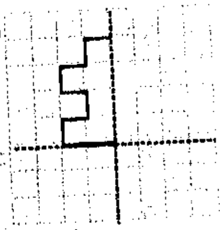
प्रश्नावली 13.3

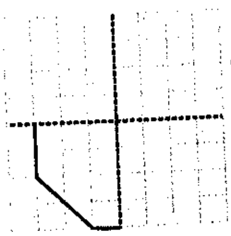
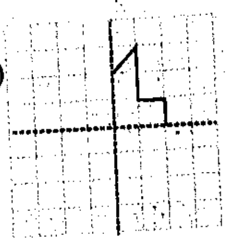
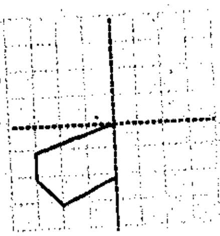
1. नीचे दी गई आकृतियों में सममिति की रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आप अपने उत्तर की जाँच कैसे करेंगे?

(a) 
(b) 
(c) 

(d) 
(e) 
(f) 

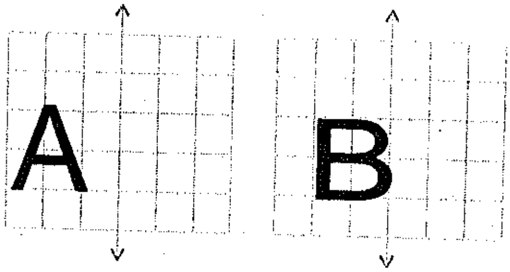
2. नीचे दी गई आरेखण को वर्गांकित पेपर पर बनाइए। प्रत्येक को पूरा कीजिए जिससे प्राप्त आकृति में दो बिंदुकित रेखाएँ दो सममिति की रेखाओं के रूप में हों :

(a) 
(b) 
(c) 

(d) 
(e) 
(f) 

आपने इस आकृति को कैसे पूरा किया?

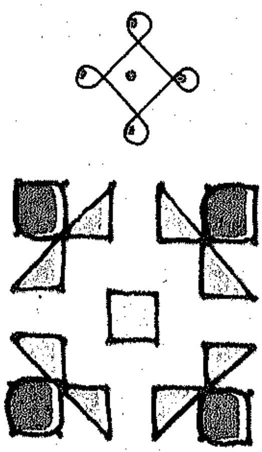
3. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में, अंग्रेजी वर्णमाला के एक अक्षर को उर्ध्वाधर रेखा के साथ दिखाया गया है। इस अक्षर का दी हुई दर्पण रेखा में प्रतिबिंब लीजिए। बताइए कौन सा अक्षर परावर्तन के बाद समान रहता है (जैसे कौन सा अक्षर प्रतिबिंब में समान दिखाई देता है) और कौन सा नहीं। क्या आप कल्पना कर सकते हैं क्यों?

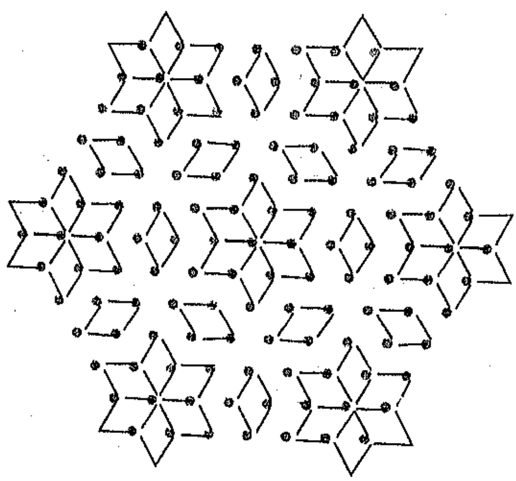


O E M N P H L T S V X के लिए प्रयास कीजिए।

रंगोली प्रतिरूप

कोलम और रंगोली हमारे देश में बहुत प्रसिद्ध हैं। कुछ नमूने यहाँ दिए गए हैं। उनमें सममिति के प्रयोग पर ध्यान दीजिए। इन प्रतिरूपों को जितना भी संभव हो सके इकट्ठा कीजिए और एक एलबम तैयार कीजिए।





इन प्रतिरूपों में सममिति की रेखाओं के साथ सममित भागों को ढूंढने का प्रयास कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक आकृति में सममिति की रेखा होती है यदि एक खींची गई रेखा आकृति को दो बराबर या समान भागों में बाँटती हो। यह रेखा सममिति की रेखा कहलाती है।
2. एक आकृति में कोई भी सममिति की रेखा नहीं, केवल एक सममिति की रेखा, दो सममिति की रेखाएँ या अनेक सममिति की रेखाएँ हो सकती हैं। यहाँ पर कुछ उदाहरण दिए गए हैं।

सममिति की रेखाओं की संख्या	*उदाहरण*
कोई सममित रेखा नहीं	एक विषमबाहु त्रिभुज
केवल एक सममित रेखा	एक समद्विबाहु त्रिभुज
दो सममित रेखाएँ	एक आयत
तीन सममित रेखाएँ	एक समबाहु त्रिभुज
अनेक सममित रेखाएँ	एक वृत्त

3. रैखिक सममिति परावर्तन से संबंधित होती है। जब हम परावर्तन के बारे में बात करते हैं तो हमें बायें↔दायें अभिमुख होने का ध्यान रखना चाहिए।

   सममिति का हमारे दैनिक जीवन में बहुत उपयोग होता है जैसे कला में, शिल्प विद्या में, वस्त्र प्रोद्यौगिकी, डिज़ाइन बनाना, ज्यामितीय तर्क, कोलम, रंगोली इत्यादि।

अध्याय 14

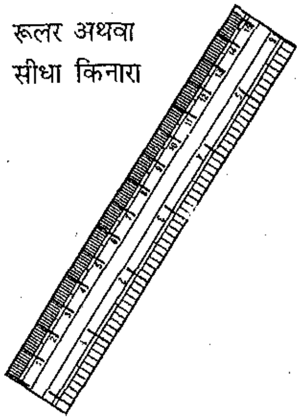
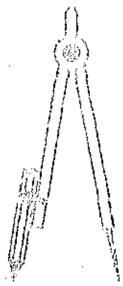
प्रायोगिक ज्यामिति

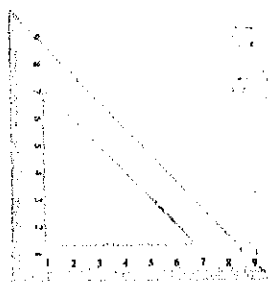
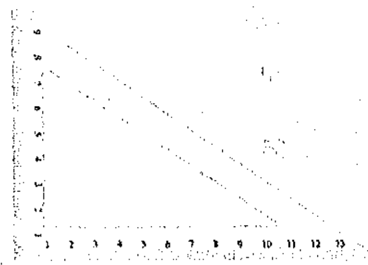
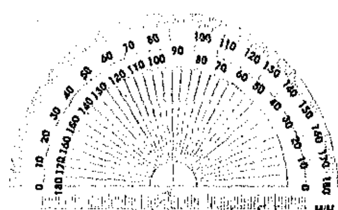
भूमिका

हम अनेक प्रकार के आकार (Shapes) देखते हैं, जिनसे हम परिचित हैं। हम बहुत से चित्र बनाते हैं। इन चित्रों में विभिन्न आकार निहित होते हैं। हम इन आकारों में से कुछ के बारे में पिछले अध्यायों में पढ़ भी चुके हैं। आप इन आकारों की एक सूची बना लें कि ये किस प्रकार प्रकट होते हैं? हम वस्तुओं के चित्र खींचने और अपने विचार लिखने में आनंद का अनुभव करते हैं। हमें आकारों को प्रभावशील ढंग से खींचने के बारे में पढ़ने की आवश्यकता है और अपने परिवेश में पाई जाने वाली वस्तुओं का विश्लेषण करके उनमें से परिचित आकारों को पहचानने की आवश्यकता है। जब हम चित्रों को खींचते हैं, तो हम उनमें निहित अनुपातों को ध्यान में रखते हैं और यह भी जानने का यत्न करते हैं कि वे विभिन्न स्थितियों से कैसे दिखेंगे। इनमें से कुछ के बारे में, हम पिछले अध्यायों में पढ़ चुके हैं और कुछ आकार ऐसे हैं जिनकी ज्यामिति में सामान्य रूप से चर्चा हो चुकी है। इनमें से कुछ के बारे में हमने विस्तृत रूप से अध्ययन किया है और इनके गुणों पर भी ध्यान दिया है।

इस अध्याय में, हम इन आकारों को बनाना सीखेंगे। इनको बनाने के लिए, हमें यन्त्रों के बारे में जानने की आवश्यकता है। आइए उन्हें देखें तथा उनके नाम और प्रयोगों के बारे में जानकारी प्राप्त करें।



क्र.सं.	नाम	आकृति	विवरण	प्रयोग
1.	रूलर अथवा सीधा किनारा		सैद्धांतिक रूप से एक रूलर में कोई चिह्न नहीं होते हैं। परन्तु आपके ज्यामिति बक्स की रूलर में एक किनारे के अनुदिश सेंटीमीटर में चिह्न होते हैं (और कभी-कभी दूसरे किनारे पर इंचों में चिह्न होते हैं।)	रेखाखंडों को खींचना और उनकी लंबाईयाँ मापना
2.	परकार		इसके दो सिरे होते हैं। एक सिरा नुकीला होता और दूसरे सिरे पर पेंसिल रखने का स्थान होता है।	बराबर लंबाइयाँ अंकित करने के लिए परंतु उन्हें मापने के लिए नहीं। चाप और वृत्त खींचने के लिए।
3.	डिवाइडर		इसके दो नुकीले सिरे होते हैं।	लंबाइयों की तुलना करने के लिए

4.	सैट स्क्वेयर  	दो त्रिभुजाकार यंत्र हैं एक में शीर्षों पर कोण 45°,45°,90° हैं और दूसरे में यह कोण 30°,60°,90° होते हैं।	लंब रेखाओं और समांतर रेखाओं को खींचना
5.	चाँदा (कोण मापक)  मध्य बिंदु	एक अर्धवृत्ताकार यंत्र 180 अंश (degree) भाग चिह्नित होते हैं। यह मापन दाईं ओर से 0° से प्रारंभ होकर बाईं ओर 180° पर समाप्त होता है और ऐसा ही बाईं ओर से प्रारंभ होकर 0° से दाईं ओर 180° पर समाप्त होता है।	कोणों को खींचना और मापना

हम **"रूलर और परकार की रचनाओं"**, पर विचार करने जा रहे हैं। इनमें रूलर (ruler) का केवल रेखाएँ खींचने और परकार (compass) का केवल चाप खींचने में प्रयोग किया जाएगा। इन रचनाओं को बनाते समय पूर्ण सावधानी बरतिए। यहाँ आपकी सहायता के लिए कुछ सुझाव दिए जा रहे हैं:

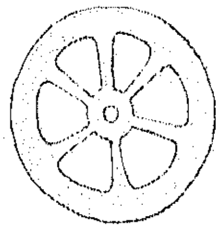
(a) पतली रेखाएँ खींचिए और हल्के बिंदु अंकित कीजिए।

(b) अपने यंत्रों को नुकीले सिरे और पतले किनारे वाला बनाकर रखिए।

(c) अपने बक्स में दो पेंसिल रखिए। एक परकार में रखने के लिए और दूसरी रेखा या वक्र खींचने और बिंदुओं को अंकित करने के लिए।

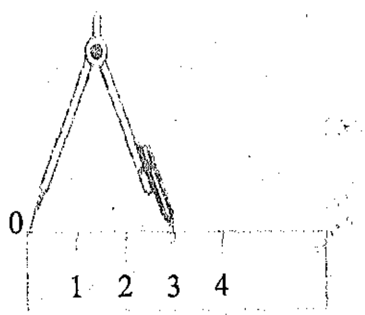
14.2 वृत्त

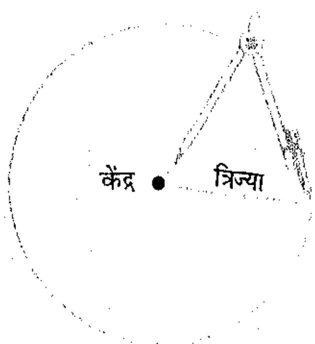
सामने दर्शाए गए पहिए को देखिए। इसकी परिसीमा (Boundary) पर स्थित प्रत्येक बिंदु इसके केंद्र से बराबर दूरी पर है। क्या आप ऐसी कुछ और वस्तुएँ बता सकते हैं और उन्हें खींच सकते हैं? ऐसी पाँच वस्तुओं के बारे में सोचिए जो इसी आकार की हों।



14.2.1 एक वृत्त खींचना जब उसकी त्रिज्या ज्ञात हो

मान लीजिए हम 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचना चाहते हैं। हमें अपने परकार का प्रयोग करने की आवश्यकता है। यह निम्न चरणों में किया जा सकता है :





चरण 1 परकार को वाँछित त्रिज्या 3 सेमी के लिए खोलिए।

चरण 2 एक नुकीली पेंसिल से वह बिंदु अंकित कीजिए जिसे हम वृत्त का केंद्र बनाना चाहते हैं। इसे बिंदु O से नामांकित कीजिए।

चरण 3 परकार के नुकीले सिरे को O पर रखिए।

चरण 4 वृत्त खींचने के लिए, परकार को धीरे-धीरे घुमाइए। ध्यान रखिए कि चक्कर एक ही बार में पूरा हो जाए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

आप निम्न से होकर कितने वृत्त खींच सकते हैं?

(a) एक बिंदु, मान लीजिए P?

(b) दो बिंदु, मान लीजिए A और B?

(c) चार बिखरे हुए बिंदु?

प्रश्नावली 14.1

1. 3.2 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए।
2. एक ही केंद्र O लेकर त्रिज्या 4 सेमी और 2.5 सेमी वाले दो वृत्त खींचिए।
3. एक वृत्त और उसके कोई दो व्यास खींचिए। यदि आप इन व्यासों के सिरों को जोड़ दें, तो कौन सी आकृति प्राप्त होती है? यदि व्यास परस्पर लंब हों, तो कौन सी आकृति प्राप्त होगी? आप अपने उत्तर की जाँच किस प्रकार करेंगे?
4. एक वृत्त खींचिए और बिंदु A, B और C इस प्रकार अंकित कीजिए कि

   (a) A वृत्त पर स्थित हो।

   (b) B वृत्त के अभ्यंतर में स्थित हो।

   (c) C वृत्त के बहिर्भाग में स्थित हो।
5. मान लीजिए A और B समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के केंद्र हैं। इन्हें इस प्रकार खींचिए ताकि एक वृत्त दूसरे के केंद्र से होकर जाए। इन्हें C और D पर प्रतिच्छेद करने दीजिए। जाँच कीजिए कि क्या $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ परस्पर समकोण पर हैं।

14.3 एक रेखाखंड

याद कीजिए कि एक रेखाखंड दो अंत बिंदुओं से परिबद्ध (Bounded) होती है। इसी कारण हम इसकी लंबाई रूलर से माप सकते हैं। यदि हमें किसी रेखाखंड की लंबाई ज्ञात हो, तो इसे एक आकृति द्वारा निरूपित करना संभव हो जाता है। आइए देखें कि हम ऐसा कैसे करते हैं।

14.3.1 एक दी हुई लंबाई के रेखाखंड की रचना करना

मान लीजिए हम 4.7 सेमी लंबाई के एक रेखाखंड की रचना करना चाहते हैं। हम रूलर का प्रयोग करके 4.7 सेमी की दूरी पर दो बिंदु A और B अंकित करते हैं। A और B को मिलाने पर हमें रेखाखंड $\overline{AB}$ प्राप्त होता है। बिंदु A और B को अंकित करते समय, हमें रूलर पर सीधे नीचे की ओर देखना चाहिए, अन्यथा हमें सही उत्तर प्राप्त नहीं होगा।

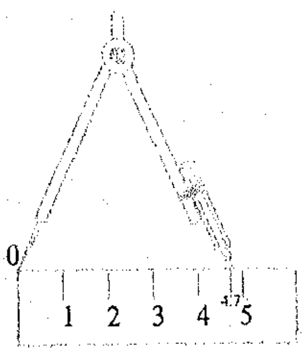
रूलर और परकार का प्रयोग

एक अच्छी विधि यह होगी कि दी हुई लंबाई के एक रेखाखंड की रचना करने के लिए, परकार का प्रयोग किया जाए

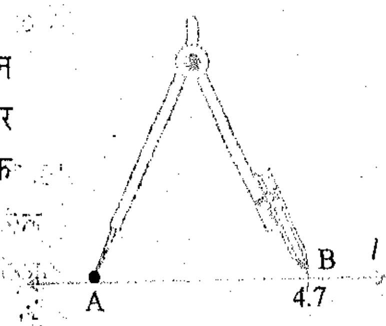
चरण 1 एक रेखा *l* खींचिए और उस पर एक बिंदु A अंकित कीजिए।



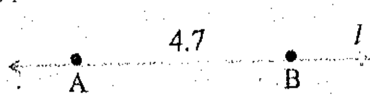
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को रूलर के शून्य पर रखिए। इसे इस प्रकार खोलिए कि पेंसिल वाला सिरा 4.7 सेमी चिह्न पर आ जाए।



चरण 3 परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए उसके नुकीले सिरे को बिंदु A पर रखें और *l* को B पर काटता हुआ एक चाप लगा दीजिए।



चरण 4 $\overline{AB}$ ही वाँछित लंबाई 4.7 सेमी का एक रेखाखंड है।



प्रश्नावली 14.2

1. रूलर का प्रयोग करके 7.3 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड खींचिए।
2. रूलर और परकार का प्रयोग करते हुए 5.6 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड खींचिए।
3. 7.8 सेमी लंबाई का रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए। इसमें से $\overline{AC}$ काटिए जिसकी लंबाई 4.7 सेमी हो। $\overline{BC}$ को मापिए।
4. 3.9 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड $\overline{AB}$ दिया है। एक रेखाखंड $\overline{PQ}$ खींचिए जो रेखाखंड $\overline{AB}$ का दोगुना हो। मापन से अपनी रचना की जाँच कीजिए।



(संकेत : $\overline{PX}$ खींचिए ताकि $\overline{PX}$ की लंबाई $\overline{AB}$ की लंबाई के बराबर हो। फिर $\overline{XQ}$ काटिए ताकि $\overline{XQ}$ की लंबाई भी $\overline{AB}$ की लंबाई के बराबर हो। इस प्रकार, $\overline{PX}$ और $\overline{XQ}$ की लंबाइयाँ मिलकर $\overline{AB}$ की लंबाई का दोगुना हो जाएँगी।)



5. 7.3 सेमी लंबाई का रेखाखंड $\overline{AB}$ और 3.4 सेमी लंबाई का रेखाखंड $\overline{CD}$ दिया है। एक रेखाखंड $\overline{XY}$ खींचिए ताकि $\overline{XY}$ की लंबाई $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ की लंबाइयों के अंतर के बराबर हो।

14.3.2 एक दिए हुए रेखाखंड के बराबर रेखाखंड की रचना करना

मान लीजिए आप एक ऐसे रेखाखंड की रचना करना चाहते हैं जिसकी लंबाई एक दिए हुए रेखाखंड $\overline{AB}$ की लंबाई के बराबर हो।

एक तुरन्त और स्वाभाविक विधि यह होगी कि आप रूलर का प्रयोग करें। (जिस पर सेंटीमीटर और मिलीमीटर के चिह्न अंकित हो) उससे $\overline{AB}$ को माप लिया जाए और फिर उसी लंबाई का प्रयोग करके एक रेखाखंड $\overline{CD}$ खींच लिया जाए। एक दूसरी विधि यह होगी कि एक पारदर्शक कागज़ का प्रयोग करके $\overline{AB}$ को कागज़

के अन्य भाग पर अक्स (trace) कर लिया जाए। परंतु इन विधियों से सदैव सही परिणाम प्राप्त नहीं हो सकते हैं।

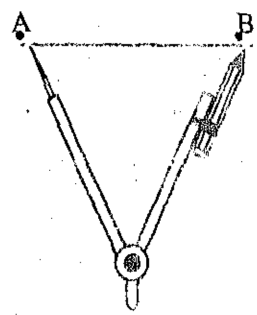
एक और अच्छी विधि होगी कि रचना के लिए, रूलर और परकार का प्रयोग किया जाए।

यह रचना $\overline{AB}$ के लिए निम्न प्रकार की जाती है :

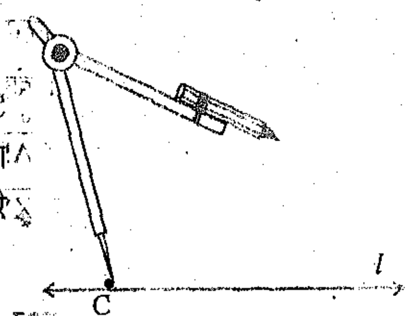
चरण 1 रेखाखंड $\overline{AB}$ दिया है, जिसकी लंबाई ज्ञात नहीं है।



चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को A पर रखिए और पेंसिल को B पर रखिए। परकार का फैलाव $\overline{AB}$ की लंबाई बताता है।

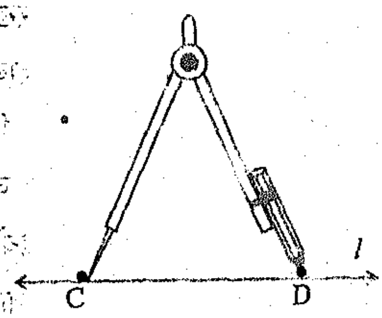


चरण 3 कोई रेखा l खींचिए। l पर कोई बिंदु C लीजिए। परकार के फैलाव में बिना कुछ परिवर्तन किए, उसके नुकीले सिरे को C पर रखिए।



चरण 4 एक चाप लगाइए जो l को D पर (मान लीजिए) काटे।

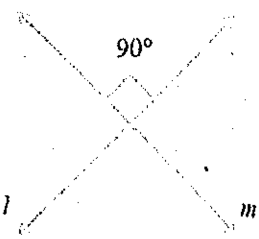
अब $\overline{CD}$ ही $\overline{AB}$ की लंबाई के बराबर का रेखाखंड है।



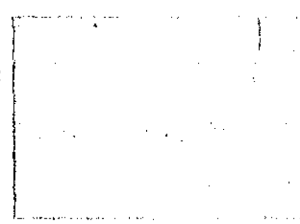
प्रश्नावली 14.3

1. कोई रेखाखंड $\overline{PQ}$ खींचिए। बिना मापे हुए, $\overline{PQ}$ के बराबर एक रेखाखंड की रचना कीजिए।
2. एक रेखाखंड $\overline{AB}$ दिया हुआ है, जिसकी लंबाई ज्ञात नहीं है। एक रेखाखंड $\overline{PQ}$ की रचना कीजिए जिसकी लंबाई $\overline{AB}$ की लंबाई की दोगुनी हो।

14.4 लंब रेखाएँ



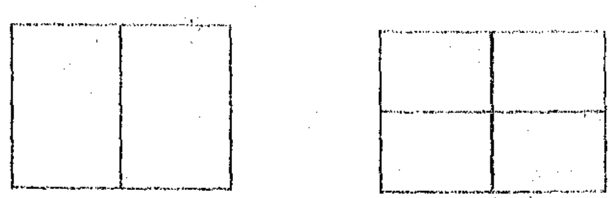
आप जानते हैं कि दो रेखाएँ (या किरणें या रेखाखंड) परस्पर लंब (perpendicular) कही जाती हैं, जब वे इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि उनके बीच के कोण समकोण हों। संलग्न आकृति में l और m परस्पर लंब हैं। वास्तव में, लंब रेखाएँ दर्शाने के लिए किसी प्रकार के कागज़ मोड़ने की कोई आवश्यकता नहीं है। एक फुलस्केप (foolscap) कागज़ या आपकी अभ्यास पुस्तिका के कोने दर्शाते हैं कि दो रेखाएँ परस्पर समकोणों पर हैं।



इन्हें कीजिए

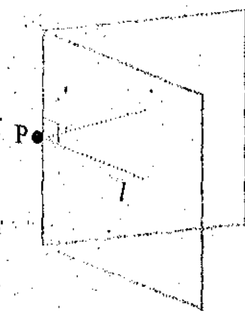
आप अपने आस पास और कहाँ लंब रेखाएँ देखते हैं?

एक कागज़ का पृष्ठ लीजिए और उसे बीच में से मोड़िए तथा मोड़ का निशान (crease) बनाइए। इसी कागज़ को बीच में से अन्य दिशा में मोड़िए। मोड़ का निशान बनाइए और कागज़ को खोल लीजिए। दोनों मोड़ के निशान एक दूसरे पर (परस्पर) लंब हैं।



14.4.1 एक दी हुई रेखा पर स्थित एक बिंदु से होकर लंब खींचना

एक रेखा l कागज़ पर खिंची हुई है और P उस पर स्थित एक बिंदु है। P से होकर गुजरता हुआ l पर लंब खींचना सरल है।



हम कागज़ को केवल इस प्रकार मोड़ सकते हैं कि मोड़ के निशान के दोनों ओर वाले l के भाग एक दूसरे को आच्छादित करें। अक्स कागज़ या कोई पारदर्शक कागज़ क्रियाकलाप के लिए अच्छा रहेगा। आइए एक कागज़ लें और उस पर कोई रेखा l खींचें। अब l पर कोई बिंदु P अंकित कर लें।

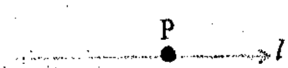
अब कागज़ को इस प्रकार मोड़िए कि l स्वयं पर परावर्तित हो जाए, अर्थात् स्वयं पर गिरे। मोड़ के निशान को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि वह P से होकर जाए। कागज़ को खोल लीजिए। मोड़ का निशान P से होकर जाता हुआ रेखा l पर लंब है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

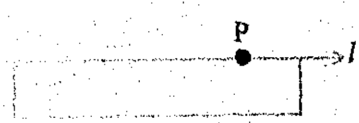
आप इसकी जाँच कैसे करेंगे कि यह l पर लंब है? ध्यान दीजिए कि यह P से होकर जाता है।

एक चुनौती : रूलर और सेट स्क्वेयर की सहायता से लंब खींचना (एक ऐच्छिक क्रियाकलाप) :

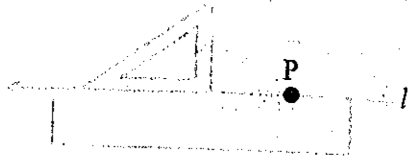
चरण 1 एक रेखा l और एक बिंदु P दिए हुए हैं। ध्यान दीजिए कि P रेखा l पर स्थित है।



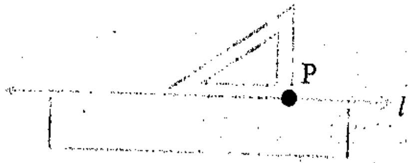
चरण 2 रूलर के एक किनारे को रेखा l के अनुदिश रखिए। इसे कस कर पकड़े रहिए।



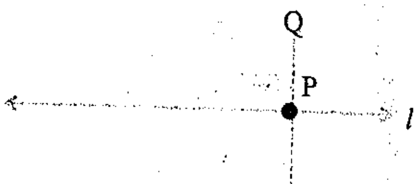
चरण 3 एक सेट स्क्वेयर को इस प्रकार रेखा *l* पर रखिए कि उसका समकोण बनाने वाला एक किनारा रूलर के उस किनारे के अनुदिश रहे जो रेखा *l* के साथ लगा हुआ है तथा सेट स्क्वेयर का समकोण वाला कोना भी रूलर के स्पर्श में रहे।



चरण 4 सेट स्क्वेयर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाइए जब तक कि उसका समकोण वाला कोना बिंदु P पर न आ जाए।



चरण 5 इस स्थिति में, सेट स्क्वेयर को कस कर पकड़े रहिए। सेट स्क्वेयर के समकोण के दूसरे किनारे के अनुदिश $\overline{PQ}$ खींचिए



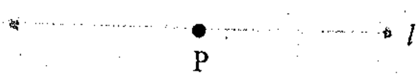
$\overline{PQ}$ रेखा *l* पर लंब है (आप इसको दर्शाने के लिए संकेत ⊥ का किस प्रकार प्रयोग करते हैं?)।

बिंदु P पर बने कोण को माप कर इस रचना की जाँच कीजिए। क्या हम 'रूलर' के स्थान पर इस रचना में दूसरे सेट स्क्वेयर का प्रयोग कर सकते हैं? इसके बारे में सोचिए।

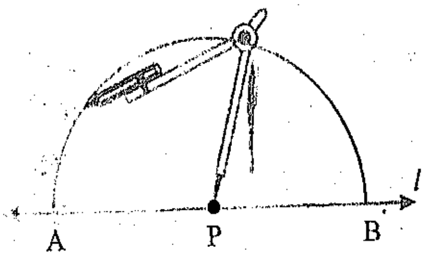
रूलर और परकार की विधि

ज्यामिति में लंब डालने की जिस विधि को प्राथमिकता दी जाती है वह "रूलर-परकार" की विधि है। इस रचना को नीचे दिया जा रहा है :

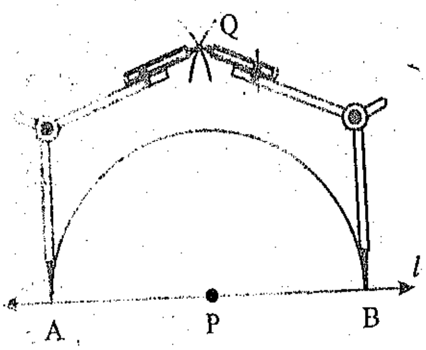
चरण 1 एक रेखा *l* पर बिंदु P दिया हुआ है।



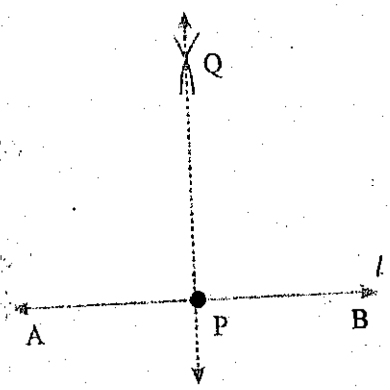
चरण 2 P को केंद्र मानकर और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा *l* को दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करें।



चरण 3 A और B को केंद्र मानकर और AP से अधिक की त्रिज्या लेकर दो चापों की रचना कीजिए जो परस्पर Q पर काटें।



चरण 4 PQ को जोड़िए (या मिलाइए) तब $\overleftrightarrow{PQ}$ ही *l* पर लंब है। हम इसे $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$ लिखते हैं।

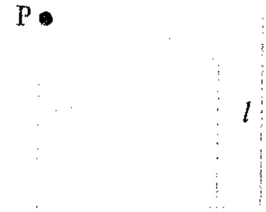


14.4.2 एक रेखा पर उस बिंदु से होकर लंब जो उस पर स्थित नहीं है।

इन्हें कीजिए

(कागज़ मोड़ना)

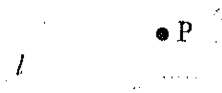
यदि हमें एक रेखा *l* दी हुई है और एक ऐसा बिंदु P दिया है, जो रेखा *l* पर स्थित नहीं है, तो P से होकर जाते हुए रेखा *l* पर लंब खींचने के लिए हम पहले जैसा कागज़ मोड़ने का सरल क्रियाकलाप पुनः कर सकते हैं।



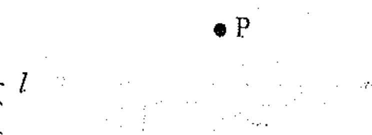
एक कागज़ का पृष्ठ लीजिए (पारदर्शक हो तो अच्छा रहेगा)। उस पर एक रेखा *l* खींचिए और कोई बिंदु P अंकित कीजिए जो *l* पर स्थित न हो। कागज़ को इस प्रकार मोड़िए कि मोड़ का निशान P से होकर जाए तथा रेखा *l* का एक भाग उसके दूसरे भाग पर पड़े। कागज़ को खोल लीजिए। मोड़ का निशान *l* पर लंब है और P से होकर जाता है।

रूलर और सेट स्क्वेयर की विधि (एक ऐच्छिक क्रियाकलाप)

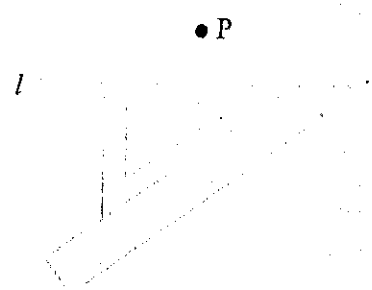
चरण 1 मान लीजिए *l* एक रेखा है और P उसके बाहर एक बिंदु है।



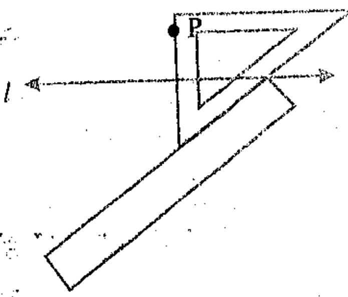
चरण 2 एक सेट स्क्वेयर को *l* पर इस प्रकार रखिए कि उसके समकोण का एक किनारा *l* के अनुदिश रहे।

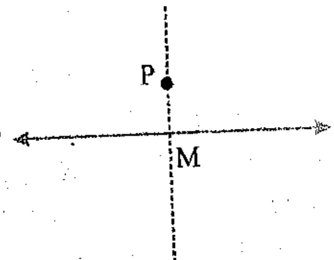


चरण 3 सेट स्क्वेयर के समकोण के सम्मुख किनारे के अनुदिश एक रूलर को रखिए।



चरण 4 रूलर को कसकर पकड़े रहिए और सेट स्क्वेयर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाइए जब तक कि P समकोण बनाने वाले दूसरे किनारे को स्पर्श न करने लगे।





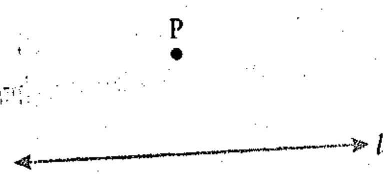
चरण 5 सेट स्क्वेयर के इस किनारे को अनुदिश P से होती हुई रेखा खींचिए जो l को M पर काटती है।

अब रेखा $\overleftrightarrow{PM} \perp l$ है।

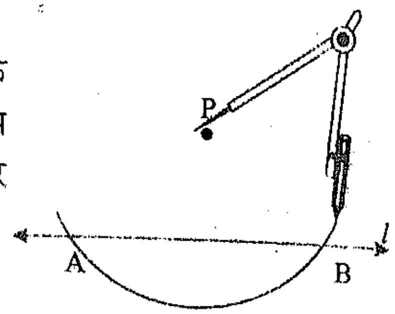
रूलर और परकार की विधि

निस्संदेह, रूलर और परकार प्रयोग करने की विधि ही एक अच्छी विधि है।

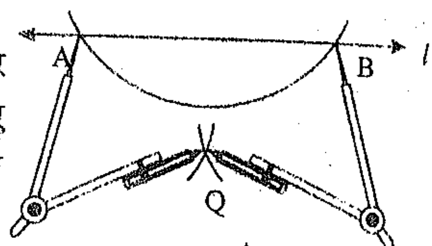
चरण 1 रेखा l और एक बिंदु P दिया है जो l पर स्थित नही है।



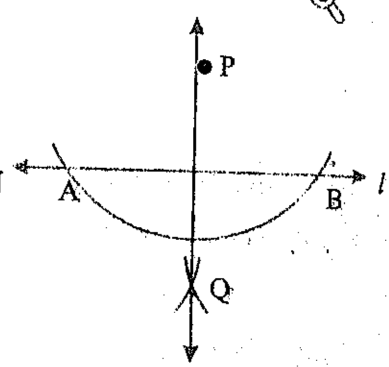
चरण 2 P को केंद्र मान कर और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा *l* को दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करे।



चरण 3 समान त्रिज्या का प्रयोग करके A और B को केंद्र मानकर दो चाप खींचिए जो एक दूसरे को बिंदु P के दूसरी तरफ Q पर प्रतिच्छेद करे।



चरण 4 PQ को जोड़िए तब $\overline{PQ}$ ही रेखा *l* पर वाँछित लंब है।



प्रश्नावली 14.4

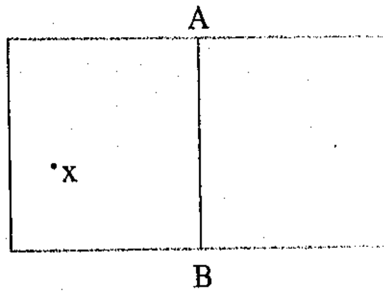
1. एक रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए। इस पर कोई बिंदु M अंकित कीजिए। M से होकर एक $\overline{AB}$ पर एक लंब, रूलर और परकार द्वारा खींचिए।
2. एक रेखाखंड $\overline{PQ}$ खींचिए। कोई बिंदु R लीजिए $\overline{PQ}$ पर न हो। R से होकर $\overline{PQ}$ पर एक लंब खींचिए। (रूलर और सेट स्क्वेयर द्वारा)
3. एक रेखा *l* खींचिए और उस पर एक बिंदु X लीजिए X से होकर, रेखा *l* पर एक लंब रेखाखंड $\overline{XY}$ खींचिए।

   अब Y से $\overline{XY}$ पर एक लंब रूलर और परकार द्वारा खींचिए।

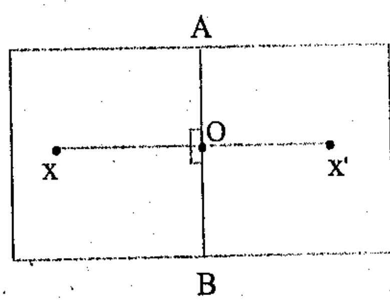
14.4.3 एक रेखाखंड का लंब समद्विभाजक

इन्हें कीजिए

एक कागज़ को मोड़िए। मान लीजिए $\overline{AB}$ मोड़ का निशान है। कहीं पर स्याही से एक बिंदु X अंकित कीजिए। $\overline{AB}$ को दर्पण रेखा (mirror line) मानते हुए X का प्रतिबम्ब X' ज्ञात कीजिए।



मान लीजिए $\overline{AB}$ और $\overline{XX'}$ परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। क्या OX = OX' है? क्यों?

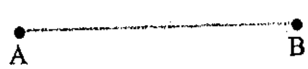


इसका अर्थ है कि $\overline{AB}$ रेखाखंड $\overline{XX'}$ को दो बराबर लंबाइयों के भागों में विभाजित करता है। अर्थात् $\overline{AB}$ रेखाखंड $\overline{XX'}$ का समद्विभाजक है। यह भी ध्यान दीजिए कि ∠AOX और ∠BOX समकोण हैं (क्यों?) अतः रेखा $\overline{AB}$ रेखाखंड $\overline{XX'}$ का लंब समद्विभाजक है। आकृति में हम $\overline{AB}$ का केवल एक हिस्सा ही देखते है। दो बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक उनकी सममित अक्ष (line of symmetry) भी है?

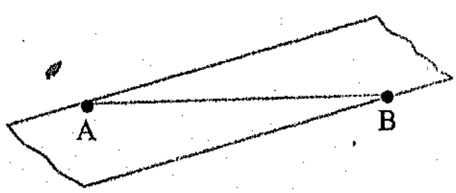
इन्हें कीजिए

(पारदर्शक फीता)

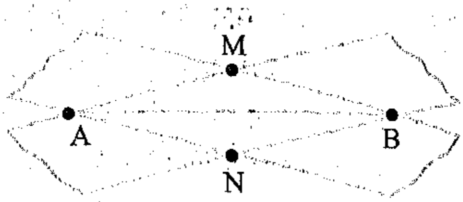
चरण 1 एक रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए।



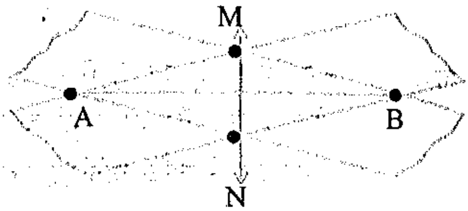
चरण 2 एक आयताकार पारदर्शक फीते की एक पट्टी को $\overline{AB}$ के विकर्णतः इस प्रकार रखें कि इसके किनारे बिंदुओं A और B पर रहें, जैसा कि सामने आकृति में दिखाया गया है।



चरण 3 इसी प्रक्रिया को एक अन्य पट्टी लेकर इस प्रकार दोहराइए कि दूसरी पट्टी विकर्णतः पहली पट्टी को A और B पर काटे। मान लीजिए ये दोनों पट्टियाँ M और N पर भी काटती हैं।

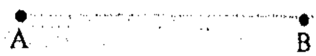


चरण 4 M और N को जोड़िए। क्या $\overline{MN}$ रेखाखंड $\overline{AB}$ का समद्विभाजक है? मापकर जाँच कीजिए। क्या यह $\overline{AB}$ का लंब समद्विभाजक भी है? $\overline{AB}$ का मध्य बिंदु कहाँ है।

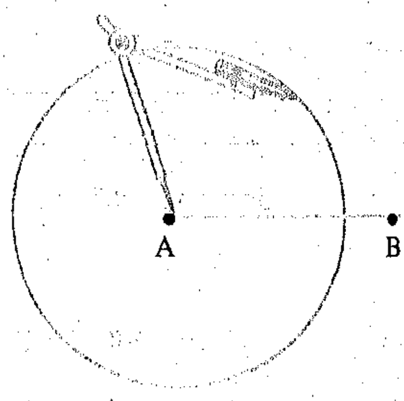


रूलर और परकार द्वारा रचना

चरण 1 किसी भी लंबाई का एक रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए।

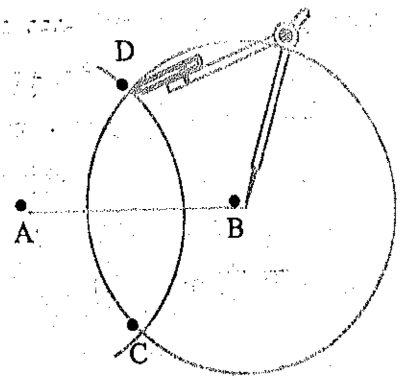


चरण 2 A को केंद्र मानकर, परकार की सहायता से एक वृत्त खींचिए। आपके वृत्त की त्रिज्या $\overline{AB}$ के आधे से अधिक होनी चाहिए।

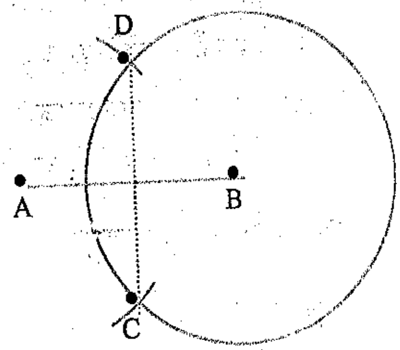




चरण 3 B को केंद्र मानकर और चरण 2 वाली त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त परकार की सहायता से खींचिए। मान लीजिए वह वृत्त पहले वृत्त को बिंदुओं C और D पर प्रतिच्छेद करता है।



चरण 4 $\overline{CD}$ को मिलाइए। यह $\overline{AB}$ को O पर प्रतिच्छेद करता है। अपने डिवाइडर का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि O रेखाखंड $\overline{AB}$ का मध्य बिंदु है। साथ ही, यह भी जाँच कीजिए कि $\angle COA$ और $\angle COB$ समकोण हैं। अतः, रेखाखंड $\overline{CD}$ रेखाखंड $\overline{AB}$ का लंब समद्विभाजक है।



उपरोक्त रचना में, हमें $\overline{CD}$ को निर्धारित करने के लिए दो बिंदुओं C और D की आवश्यकता थी। क्या इनको ज्ञात करने के लिए पूरे वृत्तों को खींचने की आवश्यकता है? क्या यह पर्याप्त नहीं है कि इन बिंदुओं को ज्ञात करने के लिए इन वृत्तों के दो छोटे चाप ही खींच लिए जाएँ? वास्तव में, व्यावहारिक रूप में हम यही करते हैं।

प्रयास कीजिए

रूलर और परकार की रचना के चरण 2 में, यदि हम त्रिज्या $\overline{AB}$ के आधे से कम लें, तो क्या होगा?

प्रश्नावली 14.5

1. 7.3 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए और उसकी सममित अक्ष ज्ञात कीजिए।
2. 9.5 सेमी लंबा एक रेखाखंड खींचिए और उसका लंब समद्विभाजक खींचिए।
3. एक रेखाखंड $\overline{XY}$ का लंब समद्विभाजक खींचिए जिसकी लंबाई 10.3 सेमी है।
   (a) इस लंब समद्विभाजक पर कोई बिंदु P लीजिए। जाँच कीजिए कि $PX = PY$ है।
   (b) यदि M रेखाखंड $\overline{XY}$ का मध्य बिंदु है, तो MX और XY के विषय में आप क्या कह सकते हैं?
4. लंबाई 12.8 सेमी वाला एक रेखाखंड खींचिए। रूलर और परकार की सहायता से इसके चार बराबर भाग कीजिए। मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।
5. 6.1 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड $\overline{PQ}$ खींचिए और फिर $\overline{PQ}$ को व्यास मानकर एक वृत्त खींचिए।
6. केंद्र C और त्रिज्या 3.4 सेमी लेकर एक वृत्त खींचिए। इसकी कोई जीवा $\overline{AB}$ खींचिए। इस जीवा $\overline{AB}$ का लंब समद्विभाजक खींचिए। जाँच कीजिए कि क्या यह वृत्त के केंद्र C से होकर जाता है।
7. प्रश्न 6 को उस स्थिति के लिए दोबारा कीजिए जब $\overline{AB}$ एक व्यास है।
8. 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसकी कोई दो जीवाएँ खींचिए। इन दोनों जीवाओं के लंब समद्विभाजक खींचिए। ये कहाँ मिलते हैं?
9. शीर्ष O वाला कोई कोण खींचिए। इसकी एक भुजा पर एक बिंदु A और दूसरी भुजा पर एक अन्य बिंदु B इस प्रकार लीजिए कि $OA = OB$ है। $\overline{OA}$ और $\overline{OB}$ के लंब समद्विभाजक खींचिए। मान लीजिए ये P पर प्रतिच्छेद करते हैं क्या $PA = PB$ है?

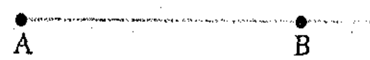
14.5 कोण



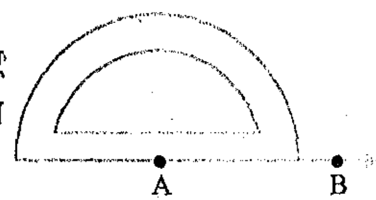
14.5.1 दिए हुए माप का कोण बनाना

मान लीजिए हम 40° का कोण बनाना चाहते हैं। इसके लिए वाँछित चरण निम्न हैं :

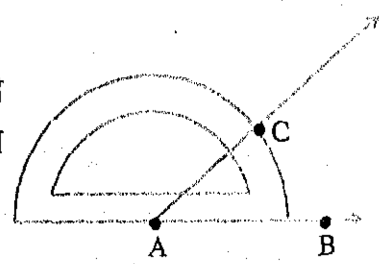
चरण 1 एक किरण $\overline{AB}$ खींचिए।



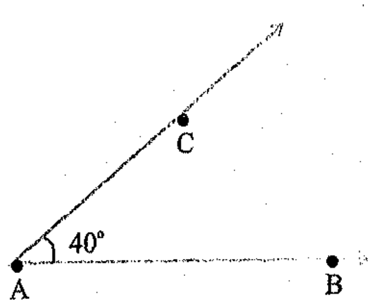
चरण 2 चाँदे के केंद्र को A पर इस प्रकार रखिए कि इसका शून्य किनारा (0°–0°) किरण $\overline{AB}$ के अनुदिश रहे।



चरण 3 B के पास के शून्य (0) से प्रारंभ करते हुए, 40° के संमुख बिंदु C अंकित कीजिए।



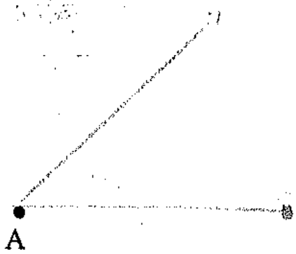
चरण 4 AC मिलाकर किरण AC बनाइए। ∠BAC ही वाँछित कोण हैं।



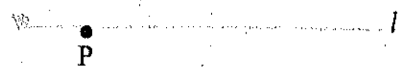
14.5.2 एक दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना

मान लीजिए हमें एक कोण दिया है जिसका माप हमें ज्ञात नहीं है। हम इस कोण के बराबर एक कोण बनाना चाहते हैं। देखिए कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

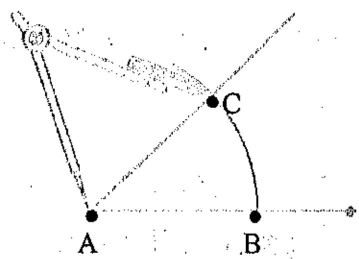
∠A दिया है जिसका माप ज्ञात नहीं है।



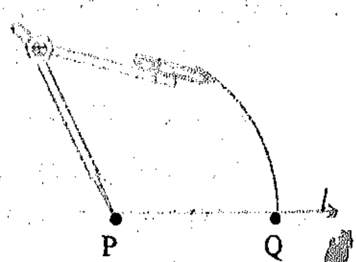
चरण 1 एक रेखा *l* खींचिए और उस पर एक बिंदु P अंकित कीजिए।



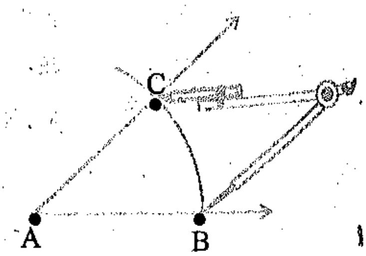
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को A पर रखकर, एक चाप खींचिए जो ∠A की भुजाओं को B और C पर काटता है।



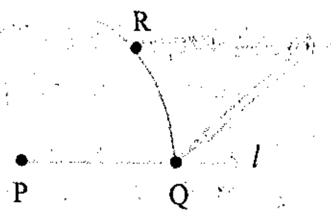
चरण 3 परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए, उसके नुकीले सिर को P पर रखकर एक चाप लगाइए जो *l* को Q पर काटता है।



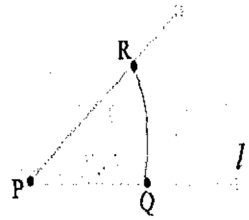
चरण 4 परकार को लंबाई BC के बराबर खोलिए।



चरण 5 परकार के फैलाव में बिना परिवर्तन किए, उसके नुकीले सिरे को Q पर रखिए और एक चाप लगाइए जो पिछले चाप को R पर काटता है।

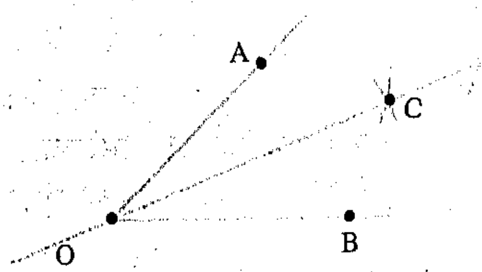


चरण 6 PR को मिलाकर किरण PR बनाइए। इससे ∠P प्राप्त होता है। ∠P ही वाँछित कोण है जिसका माप ∠A के बराबर है। इसका अर्थ है कि ∠QPR और ∠BAC के माप बराबर हैं।



14.5.3 एक कोण समद्विभाजक

एक कागज़ पर एक बिंदु O अंकित कीजिए। O को प्रारंभिक बिंदु लेकर दो किरणें $\overleftrightarrow{OA}$ और $\overleftrightarrow{OB}$ खींचिए। आपको ∠AOB प्राप्त होता जाता है। इस कागज़ को इस प्रकार मोड़िए कि मोड़ का निशान O से होकर जाए तथा किरणें $\overleftrightarrow{OA}$ और $\overleftrightarrow{OB}$ परस्पर संपाती हो जाएँ। मान लीजिए OC मोड़ का निशान है जो हमें कागज़ को खोलने पर प्राप्त होगा।

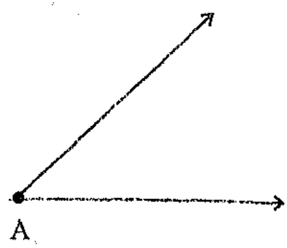


स्पष्टतः, किरण OC कोण ∠AOB की सममित अक्ष है।

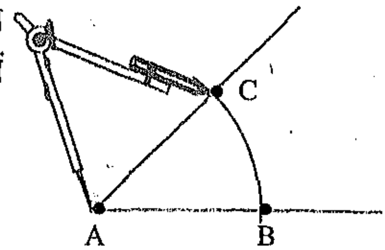
∠AOC और ∠COB को मापिए। क्या ये बराबर हैं? अतः, OC कोण ∠AOB की सममित अक्ष है और ∠AOB की समद्विभाजक है।

रूलर और परकार द्वारा रचना

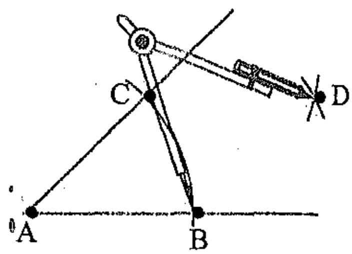
मान लीजिए एक कोण ∠A दिया है।



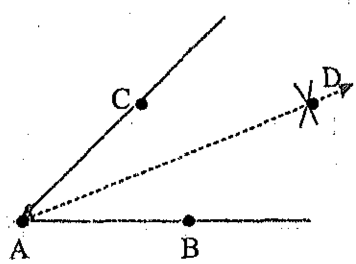
चरण 1 A को केंद्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाइए जो ∠A की किरणों (भुजाओं) को B और C पर काटता है।



चरण 2 B को केंद्र मानकर और BC के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर एक चाप ∠A के अभ्यंतर में खींचिए।



चरण 3 C को केंद्र मानकर एक चरण 2 वाली त्रिज्या लेकर, ∠A के अभ्यंतर में एक और चाप लगाइए। मान लीजिए ये दोनों चाप बिंदु D पर प्रतिच्छेद करते हैं तब, $\overline{AD}$ ही ∠A का वाँछित समद्विभाजक है।



प्रयास कीजिए

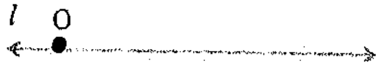
उपरोक्त चरण 2 में, यदि हम त्रिज्या BC के आधे से कम लें, तो क्या कोण होगा?

14.5.4 विशेष मापों के कोण

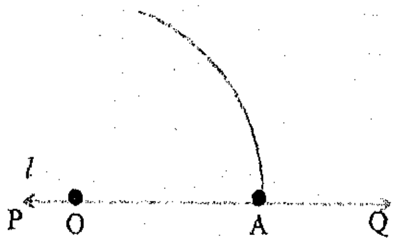
कुछ विशेष मापों के कोणों की रचना करने की कुछ सुंदर और परिशुद्ध विधियाँ हैं, जिनमें चाँदे का प्रयोग नहीं किया जाता है। इनमें से कुछ की चर्चा हम यहाँ करेंगे।

60° के कोण की रचना

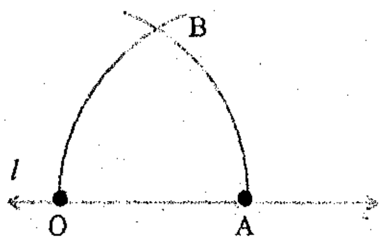
चरण 1 एक रेखा l खींचिए और उस पर एक बिंदु O अंकित कीजिए।



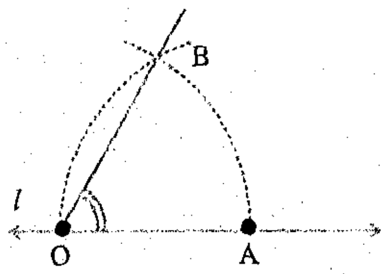
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को O पर रखिए और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए, जो रेखा l को मान लीजिए बिंदु A पर काटता है।



चरण 3 अब A को केंद्र मानकर, O से होकर जाता एक चाप खींचिए।



चरण 4 मान लीजिए ये दोनों चाप परस्पर बिंदु B पर काटते हैं। OB को जोड़कर किरण OB बनाइए। तब, ∠BOA ही 60° माप का वाँछित कोण है।



30° माप के कोण की रचना

ऊपर दर्शाए अनुसान 60° के कोण की रचना कीजिए। अब इस कोण को समद्विभाजित कीजिए। प्रत्येक 30° का है। मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।

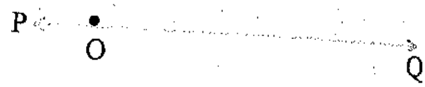
प्रयास कीजिए

15° के कोण की रचना आप किस प्रकार करेंगे?

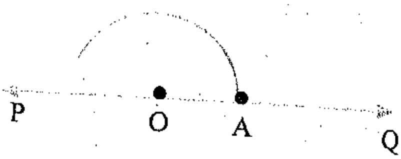
120° के कोण की रचना

120° का कोण 60° के कोण के दो गुने के अतिरिक्त कुछ नहीं है। अतः, इसकी रचना निम्न प्रकार की जा सकती है :

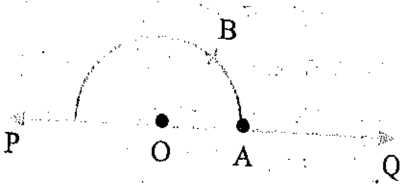
चरण 1 एक रेखा PQ खींचकर उस पर एक बिंदु O अंकित कीजिए।



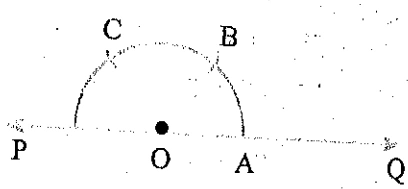
चरण 2 परकार का नुकीला सिरा O पर रखकर और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा PQ को A पर प्रतिच्छेद करे।



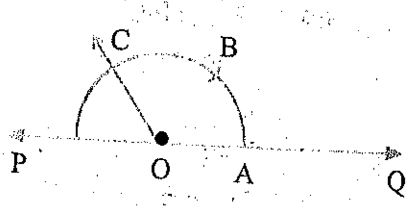
चरण 3 परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए और A को केंद्र मानकर एक चाप लगाइए जो पिछले चाप को B पर काटता है।



चरण 4 पुनः, परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए और B को केंद्र मानकर एक चाप लगाइए जो पहले चाप को C पर काटता है।



चरण 5 OC को जोड़कर किरण OC बनाइए। तब, ∠COA ही वह कोण है जिसका माप 120° है।



प्रयास कीजिए

150° के कोण की रचना आप किस प्रकार करेंगे?

90° के कोण की रचना

एक रेखा पर उस पर दिए हुए एक बिंदु से होकर एक लंब खींचिए, जो पहले कर चुके हैं। यह वाँछित 90° का कोण है।

प्रयास कीजिए

45° के कोण की रचना आप किस प्रकार करेंगे?

प्रश्नावली 14.6

1. 75° माप वाले एक कोण $\angle POQ$ की रचना कीजिए और इसकी सममित अक्ष खींचिए।
2. 147° माप वाले एक कोण की रचना कीजिए और उसका समद्विभाजक खींचिए।
3. एक समकोण खींचिए और उसके समद्विभाजक की रचना कीजिए।
4. 153° का एक कोण खींचिए और इसके चार बराबर भाग कीजिए।
5. रूलर और परकार की सहायता से निम्न मापों के कोणों की रचना कीजिए :
   (a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120° (e) 45° (f) 135°
6. 45° का एक कोण खींचिए और उसके समद्विभाजक कीजिए।
7. 135° का एक कोण खींचिए और उसे समद्विभाजित कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

इस अध्याय में, ज्यामितीय आकारों को खींचने की विभिन्न विधियाँ बताई गई हैं।

1. आकारों की रचना करने के लिए, हम ज्यामिति बक्स में दिए निम्न यंत्रों का प्रयोग करते हैं :

   (i) रूलर (ii) परकार

   (iii) डिवाइडर (iv) सेट स्क्वेयर

   (v) चाँदा

2. रूलर और परकार की सहायता से निम्न रचनाएँ की जा सकती हैं :

   (i) एक वृत्त जब उसकी त्रिज्या की लंबाई दी हो?

   (ii) एक रेखाखंड जब उसकी लंबाई दी हो।

   (iii) एक रेखाखंड के बराबर रेखाखंड बनाना।

   (iv) एक रेखा पर एक बिंदु से लंब खींचना जब वह बिंदु

   (a) रेखा पर स्थित हो। (b) रेखा पर स्थित न हो।

   (v) दी हुई लंबाई के रेखाखंड का लंब समद्विभाजक।

   (vi) दिए हुए माप का एक कोण।

   (vii) दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना।

   (viii) दिए हुए कोण का समद्विभाजक।

   (ix) कुछ विशेष मापों के कोण, जैसे :

   (a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30° (e) 120° (f) 135°

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (a) दस
   (b) दस
   (c) दस
   (d) दस
   (e) दस

2. (a) 73,75,307
   (b) 9,05,00,041
   (c) 7,52, 21,302
   (d) 58,423,202
   (e) 23,30,010

3. (a) 8,75,95,762 — आठ करोड़ पचहत्तर लाख पिच्चानवे हज़ार सात सौ बासठ
   (b) 85,46,283 — पिचासी लाख छियालीस हज़ार दो सौ तिरासी
   (c) 9,99,00,046 — नौ करोड़ निन्यानबे लाख छियालीस
   (d) 9,84,32,701 — नौ करोड़ चौरासी लाख बत्तीस हज़ार सात सौ एक

4. (a) 78,921,092 — अठहत्तर मिलियन नौ सौ इक्कीस हज़ार बानवे
   (b) 7,452,283 — सात मिलियन चार सौ बावन हज़ार दो सौ तिरासी
   (c) 99,985,102 — निन्यानवे मिलियन नौ सौ पिचासी हज़ार एक सौ दो
   (d) 48,049,831 — अड़तालीस मिलियन उन्नचास हज़ार आठ सौ इकत्तीस

प्रश्नावली 1.2

1. 7,707
2. 3,020
3. 2,28,800
4. 6,86,659; दूसरे सप्ताह, 1,14,877
5. 52,965
6. 87,575

7. 30,592

8. 65,124

9. 18 कमीज, 1 मी 30 सेमी

10. 177 बक्स

11. 22 किमी 500 मी

12. 180 गिलास

प्रश्नावली 1.3

1. (a) 1,700
   (b) 500
   (c) 16,000
   (d) 7,000

2. (a) 5,000 ; 5,090
   (b) 61,100 ; 61,130
   (c) 7,800 ; 7,840
   (d) 4,40,900 ; 4,40,980

प्रश्नावली 2.1

1. 11,000 ; 11,001 ; 11,002

2. 10,000 ; 9,999 ; 9,998

3. 0

4. 20

5. (a) 24,40,702
   (b) 1,00,200
   (c) 11,000,00
   (d) 23,45,671

6. (a) 93
   (b) 9,999
   (c) 2,08,089
   (e) 76,54,320

7. (a) संख्या 503 संख्या 530 के बाईं ओर स्थित है ; $530 > 503$
   (b) संख्या 307 संख्या 370 के बाईं ओर स्थित है ; $370 > 307$
   (c) संख्या 56,789 संख्या 98,765 के बाईं ओर स्थित है ; $98,765 > 56,789$
   (d) संख्या 98,30,415 संख्या 1,00,23,001 के बाईं ओर स्थित है ; $98,30,415 < 1,00,23,001$

8. (a) असत्य (b) असत्य (c) सत्य (d) सत्य (e) सत्य
   (f) असत्य (g) असत्य (h) असत्य (i) सत्य (j) असत्य
   (k) असत्य (l) सत्य (m) असत्य

प्रश्नावली 2.2

1. (a) 1,408 (b) 4,600
2. (a) 1,76,800 (b) 16,600 (c) 2,91,000 (d) 27,90,000
   (e) 85,500 (f) 10,00,000
3. (a) 5,940 (b) 54,27,900 (c) 81,26,500 (d) 1,92,25,000
4. (a) 76,014 (b) 87,108 (c) 2,60,064 (d) 1,68,840
5. 3,960 रु
6. 1,500 रु
7. (i) → (d) (ii) → (a) (iii) → (b)

प्रश्नावली 2.3

1. (a)
2. हाँ
3. दोनों ही '1' हैं
4. (a) 73,528 (b) 54,42,437 (c) 20,600 (d) 5,34,375
   (e) 17,640
5. $123456 \times 8 + 6 = 987654$
   $1234567 \times 8 + 7 = 9876543$

प्रश्नावली 3.1

1. (a) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 (b) 1, 3, 5, 15
   (c) 1, 3, 7, 21 (d) 1, 3, 9, 27
   (e) 1, 2, 3, 4, 6, 12 (f) 1, 2, 4, 5, 10, 20
   (g) 1, 2, 3, 6, 9, 18 (h) 1, 23
   (i) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
2. (a) 5, 10, 15, 20, 25 (b) 8, 16, 24, 32, 40
   (c) 9, 18, 27, 36, 45

3. (i) → (b) (ii) → (d) (iii) → (a)
(iv) → (f) (v) → (e)

4. 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99

प्रश्नावली 3.2

1. (a) सम संख्या (b) सम संख्या

2. (a) असत्य (b) सत्य (c) सत्य (d) असत्य
(e) असत्य (f) असत्य (g) असत्य (h) सत्य
(i) असत्य (j) सत्य

3. 17 और 71, 37 तथा 73, 79 और 97

4. अभाज्य संख्याएँ : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
भाज्य संख्याएँ : 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18

5. 7

6. (a) 3 + 41 (b) 5 + 31 (c) 5 + 19 (c) 5 + 13
(यह एक तरीका है। इसके अन्य तरीके भी हो सकते हैं)।

7. 3, 5; 5, 7 ; 11, 13

8. (a) और (c)

9. 90, 91, 92 , 93, 94, 95, 96

10. (a) 3 + 5 + 13 (b) 3 + 5 + 23
(c) 13 + 17 + 23 (d) 7 + 13 + 41
(यह एक तरीका है। इसके अन्य तरीके भी हो सकते हैं)।

11. 2, 3 ; 2, 13; 3, 17; 7, 13; 11, 19

12. (a) अभाज्य संख्या (b) भाज्य संख्या
(c) अभाज्य संख्या, भाज्य संख्या
(d) 2 (e) 4 (f) 2

प्रश्नावली 3.3

1.

संख्या	भाग करना								
	2	3	4	5	6	8	9	10	11
990	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	हाँ	हाँ
1586	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं
275	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	हाँ
6686	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं
639210	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	हाँ
429714	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं
2856	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3060	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	हाँ	नहीं
406839	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं	नहीं

2. 4 से विभाज्य : (a) , (b), (c), (d), (f), (g), (h), (i)

   8 से विभाज्य : (b), (d), (f), (h)

3. (a), (f), (g), (i)

4. (a), (b), (d), (e), (f)

5. (a) 2 और 8 (b) 0 और 9

6. (a) 8 (b) 6

प्रश्नावली 3.4

1. (a) 1, 2, 4 (b) 1, 5 (c) 1, 5 (d) 1, 2, 4, 8

2. (a) 1, 2, 4 (b) 1, 5

3. (a) 24, 48, 72 (b) 36, 72, 108

4. 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96

5. (a), (b), (e), (f)

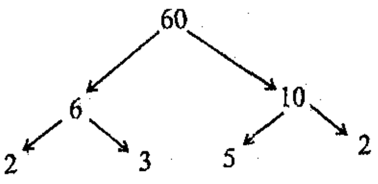
6. 60

7. 1, 2, 3, 4, 6

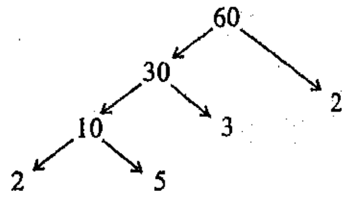
प्रश्नावली 3.5

1. (a) असत्य (b) सत्य (c) असत्य (d) सत्य
   (e) असत्य (f) असत्य (g) सत्य (h) सत्य
   (i) सत्य (j) असत्य

2. (a)



(b)



3. 1 और स्वयं वह संख्या

4. 9999, $9999 = 3 \times 3 \times 11 \times 101$

5. 10000, $10000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

6. $1729 = 7 \times 13 \times 19$
   दो क्रमागत अभाज्य गुणनखंडों का अंतर 6 है।

7. (i) $2 \times 3 \times 4 = 24$, 6 से विभाज्य है।
   (ii) $5 \times 6 \times 7 = 210$, 6 से विभाज्य है।

8. (b), (c) **9.** $15470 = 2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17$

10. हाँ

11. नहीं, संख्या 12 दोनों संख्याओं 4 और 6 से विभाज्य है परंतु संख्या 12 संख्या 24 से विभाज्य नहीं है।

12. $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$

प्रश्नावली 3.6

1. (a) 6 (b) 6 (c) 6 (d) 9
   (e) 12 (f) 34 (g) 35 (h) 7
   (i) 9 (j) 3

2. (a) 1 (b) 2 (c) 1 **3.** नहीं ; 1

प्रश्नावली 3.7

1. 3 किग्रा 2. 6930 सेमी 3. 75 सेमी 4. 120

5. 960 6. सुबह 7 बजकर 7 मिनट और 12 सेकंड

7. 31 लीटर 8. 95 9. 11[illegible]

10. (a) 36 (b) 60 (c) 30 (d) 60

11. यहाँ प्रत्येक स्थिति में ल.स. 3 का गुणज है।
हाँ, प्रत्येक स्थिति में ल.स. = दो संख्याओं का गुणनफल
संख्याओं का प्रत्येक युग्म सदैव 3 का गुणज नहीं होता है।

12. (a) 20 (b) 18 (c) 48 (d) 45
प्रत्येक स्थिति में दी हुई संख्याओं का ल.स. उन दोनों में से बड़ी संख्या होती है।

प्रश्नावली 4.1

1. (a) O, B, C, D, E
(b) अनेक उत्तर हो सकते हैं, कुछ ये हैं : DE, DO, DB, EO इत्यादि।
(c) अनेक उत्तर हो सकते हैं, कुछ ये हैं : DB, DE, OB, OE, EB इत्यादि।
(d) अनेक उत्तर हो सकते हैं, कुछ ये हैं : $\overline{DE}$, $\overline{DO}$, $\overline{EO}$, $\overline{OB}$, $\overline{EB}$ इत्यादि।

2. AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.

3. (a) अनेक उत्तर, एक उत्तर है $\overrightarrow{AE}$ (b) अनेक उत्तर, एक उत्तर है AE
(c) CO या OC
(d) अनेक उत्तर हो सकते हैं, कुछ ये हैं, CO, AE and AE, EF.

4. (a) अनगिनत (b) केवल एक

6. (a) सत्य (b) सत्य (c) सत्य (d) असत्य (e) असत्य
(f) असत्य (g) सत्य (h) असत्य (i) असत्य (j) असत्य
(k) सत्य

प्रश्नावली 4.2

1. खुला : (a), (c); बंद : (b), (d), (e). 4. (a) हाँ ; (b) हाँ

5. (a)  (b)  (c) संभव नहीं है।

प्रश्नावली 4.3

1. ∠A अथवा ∠DAB; ∠B अथवा ∠ABC; ∠C अथवा ∠BCD; ∠D अथवा ∠CDA

2. (a) A; (b) A, C, D. (c) E, B, O, F.

प्रश्नावली 4.4

2. (a) ΔABC, ΔABD, ΔADC.
   (b) कोण : ∠B, ∠C, ∠BAC, ∠BAD, ∠CAD, ∠ADB, ∠ADC
   (c) रेखाखंड : $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$
   (d) ΔABC, ΔABD

प्रश्नावली 4.5

1. विकर्ण चतुभुर्ज के अभ्यंतर में प्रतिच्छेद करेंगे।

2. (a) $\overline{KL}$, $\overline{NM}$ आर $\overline{KN}$, $\overline{ML}$ (b) ∠K, ∠M और ∠N, ∠L
   (c) $\overline{KL}$, $\overline{KN}$ आर $\overline{NM}$, $\overline{ML}$ अथवा $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ आर $\overline{NM}$, $\overline{NK}$
   (d) ∠K, ∠L और ∠M, ∠N अथवा ∠K, ∠L और ∠L, ∠M इत्यादि।

प्रश्नावली 4.6

1. (a) O (b) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ (c) $\overline{AC}$ (d) $\overline{ED}$

(e) O, P (f) Q (g) OAB (छांयाकित भाग)

(h) रेखाखंड ED (छायांकित भाग)

2. (a) हाँ (b) नहीं

4. (a) हाँ (b) हाँ

प्रश्नावली 5.1

1. गलत तरीके से देखने पर अधिक त्रुटियों की संभावना है।
2. सही माप संभव होगा।
3. हाँ (क्योंकि C, A और B के बीच में है)
4. B, A और C के बीच में है।
5. D, $\overline{AG}$ का मध्यबिंदु है। (क्योंकि, AD = DG = 3 इकाई).
6. AB = BC और BC = CD, इसलिए AB = CD
7. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई का योग उसकी तीसरी भुजा की लंबाई से कभी भी कम नहीं हो सकती है।

प्रश्नावली 5.2

1. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$

   (e) $\frac{3}{4}$ (f) $\frac{3}{4}$
2. (a) 6 (b) 8 (c) 8 (d) 2
3. (a) पश्चिम (b) पश्चिम (c) उत्तर (d) दक्षिण

[(d), के उत्तर में इससे कोई अंतर नहीं पड़ता है कि हम घड़ी की दिशा में या घड़ी की विपरीत दिशा में घूर्णन करें, क्योंकि एक पूरा घूर्णन हमें प्रारंभिक स्थिति में ले आएगा]।

4. (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$

5. (a) 1 (b) 2 (c) 2 (d) 1
(e) 3 (f) 2

6. (a) 1 (b) 3 (c) 4
(d) 2 (घड़ी की दिशा में या घड़ी की विपरीत दिशा में)

7. (a) 9 (b) 2 (c) 7 (d) 7
(हम केवल घड़ी की दिशा का ही विचार करेंगे)

प्रश्नावली 5.3

1. (i) → (c); (ii) → (d); (iii) → (a); (iv) → (e); (v) →(b).

2. न्यूनकोण: (a) और (f); अधिककोण: (b); समकोण: (c); ऋजुकोण: (e); प्रतिवर्तीकोण: (d)

प्रश्नावली 5.4

1. (i) 90°; (ii) 180°.

2. (a) सत्य (b) असत्य (c) सत्य (d) सत्य
(e) सत्य

3. (a) न्यूनकोण: 23°, 89°; (b) अधिककोण: 91°, 179°.

7. (a) न्यूनकोण (b) अधिककोण (यदि कोण 180° से कम है)।
(c) ऋजुकोण (d) न्यूनकोण (e) एक समकोण या अधिककोण

9. 90°, 30°, 180°

10. आवर्धन शीशे से देखने पर कोण के माप में कोई अंतर नहीं आता।

प्रश्नावली 5.5

1. (a) और (c) **2.** 90°

3. एक 30°-60°-90° सेट स्क्वेयर है तथा दूसरा 45°-45°-90° सेट स्क्वेयर है। 90° अंश का कोण (अर्थात् समकोण उसमें सार्व है)।

4. (a) हाँ (b) हाँ (c) $\overline{BH}, \overline{DF}$ (d) सभी सत्य हैं।

प्रश्नावली 5.6

1. (a) विषमबाहु त्रिभुज (b) विषमबाहु त्रिभुज
(c) समबाहु त्रिभुज (d) समकोण त्रिभुज
(e) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज (f) न्यूनकोण त्रिभुज

2. (i) → (e); (ii) → (g); (iii) → (a); (iv) → (f); (v) → (d); (vi) → (c); (vii) → (b)

3. (a) न्यूनकोण और समद्विबाहु त्रिभुज (b) समकोण और विषमबाहु
(c) अधिककोण और समद्विबाहु (d) समकोण और समद्विबाहु
(e) समबाहु और न्यूनकोण (f) अधिककोण और विषमबाहु

4. (b) यह संभव नहीं है। (ध्यान रखिए : त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाई का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है)

प्रश्नावली 5.7

1. (a) सत्य (b) सत्य (c) सत्य (d) सत्य
(e) असत्य (f) असत्य

2. (a) जब आयत की सभी भुजाएँ समान होती हैं वह एक वर्ग बन जाता है।
(b) जब समांतर चतुर्भुज़ का प्रत्येक कोण एक समकोण होता है, वह एक आयत बन जाता है।
(c) जब समचतुर्भुज का प्रत्येक कोण समकोण होता है, वह एक वर्ग बन जाता है।

(d) ये सभी चार भुजाओं वाले बहुभुज हैं।

(e) वर्ग की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं, इसलिए यह समांतर चतुर्भुज है।

3. वर्ग एक समचतुर्भुज है।

प्रश्नावली 5.8

1. (a) बंद आकृति नहीं है, इसलिए वह बहुभुज नहीं है।

   (b) एक छः भुजाओं वाला बहुभुज है।

   (c) और (d) बहुभुज नहीं है क्योंकि ये रेखाखंडों से नहीं बने हैं।

2. (a) चतुर्भुज (b) त्रिभुज

   (c) पंचभुज (पांच भुजाओं वाला)

   (d) अष्टभुज

प्रश्नावली 5.9

1. (a) → (ii); (b) → (iv); (c) → (v); (d) → (iii); (e) → (i).
2. (a), (b) और (c) घनाभ है; (d) एक बेलन है; (e) एक गोला है।

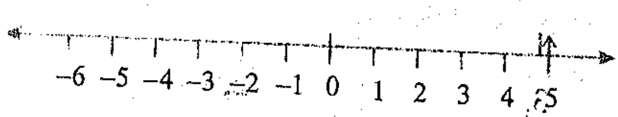
प्रश्नावली 6.1

1. (a) भार में कमी (b) 30 किमी दक्षिण

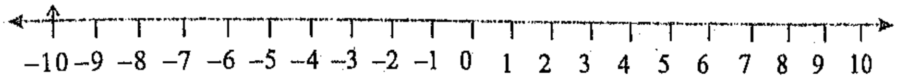
   (c) 326 ई (d) 700 रु का लाभ

   (e) समुद्र तल से 100 मी नीचे।

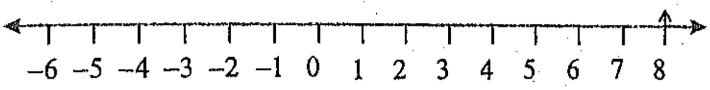
2. (a) + 2000 (b) – 800 (c) + 200 (d) – 700
3. (a) + 5



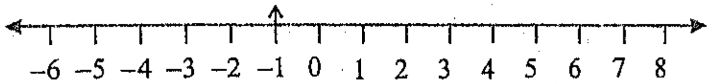
(b) – 10



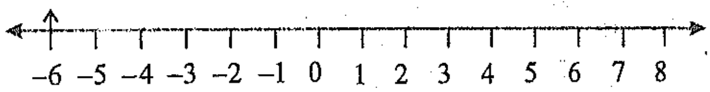
(c) + 8



(d) – 1



(e) – 6



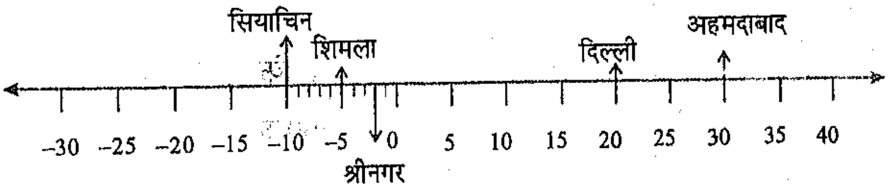
4. (a) F (b) ऋणात्मक पूर्णांक

(c) B → + 4, E → – 10

(d) E (e) D, C, B, A, O, H, G, F, E

5. (a) – 10°C, – 2°C, + 30°C, + 20°C, – 5°C

(b)



(c) सियाचिन (d) अहमदाबाद और दिल्ली

6. (a) 9 (b) – 3 (c) 0 (d) 10

(e) 6 (f) 1

7. (a) – 6, – 5, – 4, – 3, – 2, – 1 (b) – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3

(c) – 14, – 13, – 12, – 11, – 10, – 9

(d) – 29, – 28, – 27, – 26, – 25, – 24

8. (a) – 19, – 18, – 17, – 16 (b) – 11, – 12, – 13, – 14

9. (a) सत्य (b) असत्य; संख्या रेखा पर – 100 संख्या – 10 के बाईं ओर स्थित है।

(c) असत्य; – 1 सबसे बड़ा पूर्णांक है।

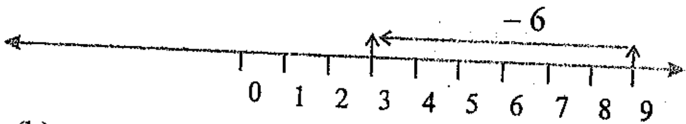
(d) असत्य; – 26 संख्या – 25 से छोटी है।

10. (a) 2 (b) – 4 (c) बाईं ओर (d) दाईं ओर

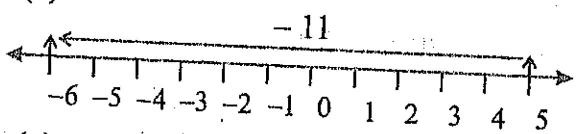
प्रश्नावली 6.2

1. (a) 8 (b) 0 (c) – 4 (d) – 5

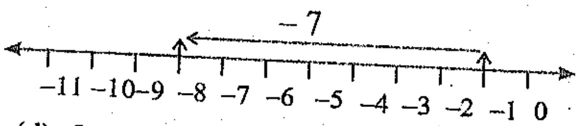
2. (a) 3



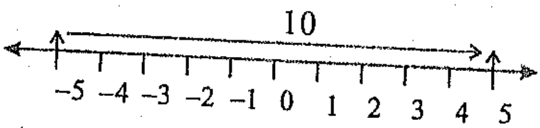
(b) – 6



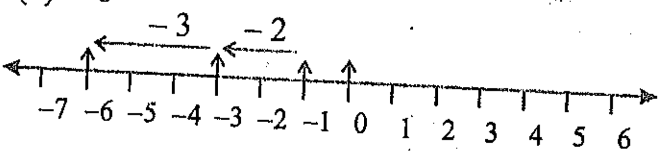
(c) – 8



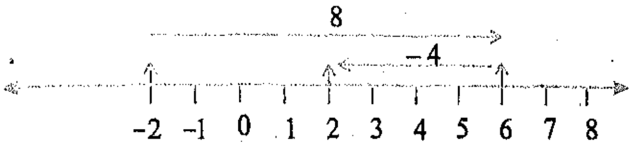
(d) 5



(e) – 6



(f) 2



3. (a) 4 (b) 5 (c) 9 (d) –100
(e) – 650 (f) – 317

4. (a) – 217 (b) 0 (c) – 81 (d) 50

5. (a) 4 (b) –38

प्रश्नावली 6.3

1. (a) 15 (b) – 18 (c) 3 (d) – 33
(e) 35 (f) 8

2. (a) < (b) > (c) > (d) >

3. (a) 8 (b) – 13 (c) 0 (d) – 8
(e) 5

4. (a) 10 (b) 10 (c) – 105 (d) 92

प्रश्नावली 7.1

1. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{4}$ (iii) $\frac{8}{9}$ (iv) $\frac{3}{9}$
(v) $\frac{4}{8}$ (vi) $\frac{1}{5}$ (vii) $\frac{1}{4}$ (viii) $\frac{3}{7}$
(ix) $\frac{3}{12}$ (x) कोई भाग नहीं (xi) $\frac{4}{9}$ (xii) $\frac{4}{8}$
(xiii) $\frac{1}{2}$

3. छायांकित भाग दी गई भिन्न नहीं दर्शाता।

4. $\frac{8}{24}$ 5. $\frac{40}{60}$

6. (a) आर्या प्रत्येक सैंडविच को तीन समान भागों में बांटेगा और प्रत्येक सैंडविच का एक भाग प्रत्येक को देगा (b) $\frac{1}{3}$

7. $\frac{2}{3}$ 8. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; $\frac{5}{11}$

9. 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113; $\frac{4}{12}$

10. (a) $\frac{5}{8}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{8}$

11. $\frac{5}{10}$ 12. $\frac{3}{8}$

1. (a) 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$

(b) 0, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{8}$, 1

(c) 0, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1, $\frac{8}{5}$

2. (a) $6\frac{2}{3}$ (b) $2\frac{1}{5}$ (c) $2\frac{3}{7}$ (d) $5\frac{3}{5}$

(e) $3\frac{1}{6}$ (f) $3\frac{8}{9}$

3. (a) $\frac{31}{4}$ (b) $\frac{41}{7}$ (c) $\frac{17}{6}$ (d) $\frac{53}{5}$

(e) $\frac{66}{7}$ (f) $\frac{76}{9}$

प्रश्नावली

1. (a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$; हाँ (b) $\frac{4}{12}, \frac{3}{9}, \frac{2}{6}, \frac{1}{3}, \frac{6}{15}$; नहीं

2. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{4}{6}$ (c) $\frac{3}{9}$ (d) $\frac{2}{8}$

(e) $\frac{3}{4}$ (i) $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{2}{4}$ (iii) $\frac{6}{8}$

(iv) $\frac{4}{6}$ (v) $\frac{2}{8}$

(a), (ii); (b), (iv); (c), (i); (d), (v); (e), (iii)

3. (a) 28 (b) 16 (c) 12 (d) 20 (e) 3

4. (a) $\frac{12}{20}$ (b) $\frac{9}{15}$ (c) $\frac{18}{30}$ (d) $\frac{27}{45}$

5. (a) $\frac{9}{12}$ (b) $\frac{3}{4}$

6. (a) तुल्य (b) तुल्य नहीं (c) तुल्य नहीं

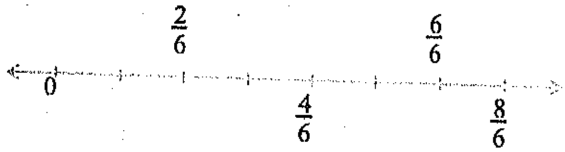
7. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{6}{7}$ (d) $\frac{3}{13}$ (e) $\frac{1}{4}$

8. रमेश $\rightarrow \frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, शीलू $\rightarrow \frac{25}{50}=\frac{1}{2}$, जमाल $\rightarrow \frac{40}{80}=\frac{1}{2}$ हाँ

9. (i) → (d) (ii) → (e) (iii) → (a) (iv) → (c)
(v) → (b)

प्रश्नावली 7.4

1. (a) $\frac{1}{8}<\frac{3}{8}<\frac{4}{8}<\frac{6}{8}$ (b) $\frac{3}{9}<\frac{4}{9}<\frac{6}{9}<\frac{8}{9}$

(c) 

$\frac{5}{6}>\frac{2}{6}, \frac{3}{6}>\frac{0}{6}, \frac{1}{6}<\frac{6}{6}, \frac{8}{6}>\frac{5}{6}$

2. (a) $\frac{3}{6}<\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{7}<\frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{5}>\frac{0}{5}$ (d) $\frac{3}{20}<\frac{4}{20}$

4. $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right), \frac{3}{6}\left(=\frac{1}{2}\right), \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{0}{6}, \frac{6}{6}$; $\frac{0}{6}<\frac{1}{6}<\frac{2}{6}<\frac{3}{6}<\frac{4}{6}<\frac{5}{6}<\frac{6}{6}$

5. (a) $\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4}>\frac{2}{6}$ (c) $\frac{2}{3}>\frac{2}{4}$ (d) $\frac{6}{6}=\frac{3}{3}$

(e) $\frac{0}{1}=\frac{0}{6}$ (f) $\frac{5}{6}<\frac{5}{5}$

6. (a) $\frac{1}{2}>\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$ (c) $\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}>\frac{2}{8}$

(e) $\frac{3}{5}<\frac{6}{5}$ (f) $\frac{7}{9}>\frac{3}{9}$ (g) $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ (h) $\frac{6}{10}<\frac{4}{5}$

(i) $\frac{3}{4}<\frac{7}{8}$ (j) $\frac{6}{10}<\frac{4}{5}$ (k) $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$

7. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{4}{25}$ (d) $\frac{4}{25}$

(e) $\frac{1}{6}$ (f) $\frac{1}{5}$ (g) $\frac{1}{5}$ (h) $\frac{1}{6}$

(i) $\frac{4}{25}$ (j) $\frac{1}{6}$ (k) $\frac{1}{6}$ (l) $\frac{4}{25}$

(a), (e), (h), (j), (k) ; (b), (f), (g) ; (c), (d), (i), (l)

8. (a) नहीं ; $\frac{5}{9}=\frac{25}{45}, \frac{4}{5}=\frac{36}{45}$ और $\frac{25}{45}\neq\frac{36}{45}$

(b) नहीं ; $\frac{9}{16}=\frac{81}{144}, \frac{5}{9}=\frac{80}{144}$ और $\frac{81}{144}\neq\frac{80}{144}$

(c) हाँ ; $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$

(d) नहीं ; $\frac{1}{15} = \frac{2}{30}$ और $\frac{2}{30}\neq\frac{4}{30}$

9. ईला कम पढ़ती है। 10. रोहित

11. दोनों कक्षाओं में प्रथम श्रेणी में पास हुए विद्यार्थियों की भिन्न ($\frac{4}{5}$) समान है।

प्रश्नावली 7.5

1. (a) + (b) – (c) +

2. (a) $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$ (b) $\frac{8}{8}+\frac{8}{8}+\frac{2}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$

3. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{11}{15}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) 1

(e) $\frac{11}{9}$ (f) $\frac{1}{3}$ (g) 1 (h) $\frac{7}{5}$

(i) $\frac{1}{3}$ (j) $\frac{1}{4}$ (k) $\frac{0}{2}$ (= 0) (l) $\frac{9}{5}$

(m) $\frac{2}{3}$ (n) $\frac{3}{5}$

4. पूरी दीवार **5.** 6 किग्रा

6. (a) $\frac{4}{10}$ (= $\frac{2}{5}$) (b) $\frac{8}{21}$ (c) $\frac{6}{6}$ (=1) (d) $\frac{7}{27}$

7. $\frac{1}{5}$ **8.** $\frac{2}{7}$

प्रश्नावली 7.6

1. (a) $\frac{17}{21}$ (b) $\frac{23}{30}$ (c) $\frac{46}{63}$ (d) $\frac{22}{21}$

(e) $\frac{17}{30}$ (f) $\frac{22}{15}$ (g) $\frac{5}{12}$ (h) $\frac{3}{6}$ (= $\frac{1}{2}$)

(i) $\frac{3}{10}$ (j) $\frac{1}{6}$ (k) $\frac{2}{6}$ (= $\frac{1}{3}$) (l) $\frac{10}{24}$ (= $\frac{5}{12}$)

(m) $\frac{23}{12}$ (n) $\frac{6}{6}$ (= 1) (o) 5 (p) $\frac{95}{12}$

(q) $\frac{9}{5}$ (r) $\frac{5}{6}$ (s) $\frac{2}{3}$ (t) $\frac{6}{3}$ (=2)

2. $\frac{23}{20}$ मीटर **3.** $\frac{17}{6}$

4. (a) $\frac{7}{8}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) $\frac{1}{3}$

5. (a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

6. दूसरे टुकड़े की लंबाई = $\frac{5}{8}$ मी

7. नंदिनी द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{4}{10}$ (= $\frac{2}{5}$) मा

8. आशा की अलमारी अधिक भरी है; $\frac{13}{30}$ से

9. राहुल कम समय लेता है; $\frac{9}{20}$ मिनट से

प्रश्नावली 8.1

1.

	सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)
(a)	0	3	1	2
(b)	1	1	0	4

2.

	सैंकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)
(a)	0	1	9	4
(b)	0	0	0	3
(c)	0	1	0	6
(d)	2	0	5	9

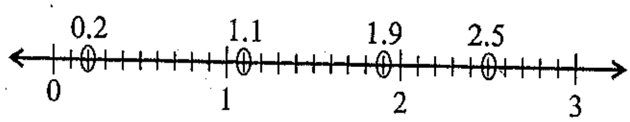
3. (a) 0.7 (b) 20.9 (c) 14.6 (d) 102.0
(e) 600.8

4. (a) 0.5 (b) 3.7 (c) 265.1 (d) 3.6
(e) 70.8 (f) 8.8 (g) 4.2 (h) 1.5
(i) 0.4 (j) 2.4 (k) 3.6 (l) 4.5

5. (a) $\frac{6}{10}, \frac{3}{5}$ (b) $\frac{25}{10}, \frac{5}{2}$ (c) 1, 1 (d) $\frac{38}{10}, \frac{19}{5}$
(e) $\frac{137}{10}, \frac{137}{10}$ (f) $\frac{212}{10}, \frac{106}{5}$ (g) $\frac{64}{10}, \frac{32}{5}$

6. (a) 0.2 सेमी (b) 3.0 सेमी (c) 11.6 सेमी (d) 4.2 सेमी
(e) 16.2 सेमी (f) 8.3 सेमी

7. (a) 0 और 1; 1 (b) 5 और 6; 5
(c) 2 और 3; 3 (d) 6 और 7; 6
(e) 9.0 स्वयं एक पूर्ण संख्या है। (f) 4 और 5; 5

8.


9. A, 0.8 सेमी; B, 1.3 सेमी; C, 2.2 सेमी; D, 2.9 सेमी

10. (a) 9.5 सेमी (b) 6.5 सेमी

प्रश्नावली 8.2

1.

	इकाई	दशांश	शतांश	संख्या
(a)	0	2	6	0.26
(b)	1	3	8	1.38
(c)	1	2	8	1.28

2. (a) 3.25 (b) 102.63 (c) 30.025 (d) 211.902
(e) 12.241

3.

	सैंकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	सहस्त्रांश
(a)	0	0	0	2	9	0
(b)	0	0	2	0	8	0
(c)	0	1	9	6	0	0
(d)	1	4	8	3	2	0
(e)	2	0	0	8	1	2

4. (a) 29.41 (b) 30.483 (c) 137.05 (d) 0.764
(e) 23.206 (f) 725.09

5. (a) शून्य दशमलव शून्य तीन
(b) एक दशमलव दो शून्य
(c) सत्रह दशमलव तीन आठ
(d) एक सौ आठ दशमलव पाँच छः
(e) दस दशमलव शून्य सात
(f) दो सौ दस दशमलव एक शून्य नौ
(g) शून्य दशमलव शून्य तीन दो
(h) पाँच दशमलव शून्य शून्य आठ

6. (a) 0 और 0.1 (b) 0.4 और 0.5
(c) 0.1 और 0.2 (d) 0.6 और 0.7
(e) 0.9 और 1.0 (f) 0.5 और 0.6
(g) 0.0 और 0.1 (h) 0.1 और 0.3

7. (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{1}{20}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{9}{50}$

(e) $\frac{1}{4}$ (f) $\frac{41}{50}$ (g) $\frac{1}{250}$ (h) $\frac{1}{8}$ (i) $\frac{33}{500}$

प्रश्नावली 8.3

1. (a) 0.4 (b) 0.07 (c) 3 (d) 0.5
(e) 0.11 (f) 2.012 (g) 1 (h) 1.23
(i) 0.19 (j) दोनों समान हैं (k) 1.490 (l) दोनों समान हैं
(m) 5.64 (n) 1.8000 (o) 2.05

प्रश्नावली 8.4

1. (a) 0.05 रु (b) 0.75 रु (c) 3.60 रु (d) 4.50 रु
(e) 0.20 रु (f) 50.90 रु (g) 7.25 रु
2. (a) 0.15 मी (b) 0.06 मी (c) 1.36 मी (d) 2.45 मी
(e) 9.07 मी (f) 4.19 मी
3. (a) 0.5 सेमी (b) 6.0 सेमी (c) 16.4 सेमी (d) 9.8 सेमी
(e) 16.7 सेमी (f) 9.3 सेमी
4. (a) 0.008 किमी (b) 0.088 किमी (c) 0.88 किमी (d) 8.888 किमी
(e) 70.005 किमी (f) 29.037 किमी
5. (a) 0.002 किग्रा (b) 0.1 किग्रा (c) 3.750 किग्रा (d) 2.7 किग्रा
(e) 5.008 किग्रा (f) 26.05 किग्रा
6. (a) 230 पैसे (b) 9240 ग्रा
(c) 35 मिमि (d) 3050 मी
(e) 881 सेमी (f) 1305 पैसे
(g) 15038 मी (h) 14007 ग्रा
(i) 1106 सेमी (j) 2 मिमि

प्रश्नावली 8.5

1. (a) 38.587 (b) 29.432 (c) 27.63 (d) 38.355
(e) 13.175 (f) 343.89

2. 68.35 रु **3.** 26.30 रु **4.** 5.25 मी **5.** 3.75 मी

प्रश्नावली 8.6

1. (a) 2.50 रु (b) 47.46 मी (c) 3.04 रु (d) 3.155 किमी
(e) 1.793 किग्रा

2. (a) 3.476 (b) 5.78 (c) 11.71 (d) 1.753

3. 14.35 रु **4.** 6.75 रु

5. 15.55 मी **6.** 9.850 किमी

7. 4.425 किग्रा **8.** 3.042 किमी

9. 22.775 किमी **10.** 18.270 किग्रा

प्रश्नावली 9.1

1.

अंक	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
1	$\mid\mid$	2
2	$\mid\mid\mid$	3
3	$\mid\mid\mid$	3
4	$\cancel{\mid\mid\mid\mid}\ \mid\mid$	7
5	$\cancel{\mid\mid\mid\mid}\ \mid$	6
6	$\cancel{\mid\mid\mid\mid}\ \mid\mid$	7
7	$\cancel{\mid\mid\mid\mid}$	5
8	$\mid\mid\mid\mid$	4
9	$\mid\mid\mid$	3

(a) 12 (b) 8

2.	मिठाई	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
	लड्डू	𝍸 𝍸 |	11
	बर्फ़ी	|||	3
	जलेबी	𝍸 ||	7
	रसगुल्ला	𝍸 ||||	9
			30

(b) लड्डू

3. (i) गाँव D (ii) गाँव C (iii) 3 (iv) 28

4. (a) 14 (b) रविवार (c) 180 रु (d) 860 रु

(e) 10

5. (a) VIII (b) नहीं (c) 12

6. (a) मार्टिन (b) 700 (c) अनवर, मार्टिन, रंजीत सिंह

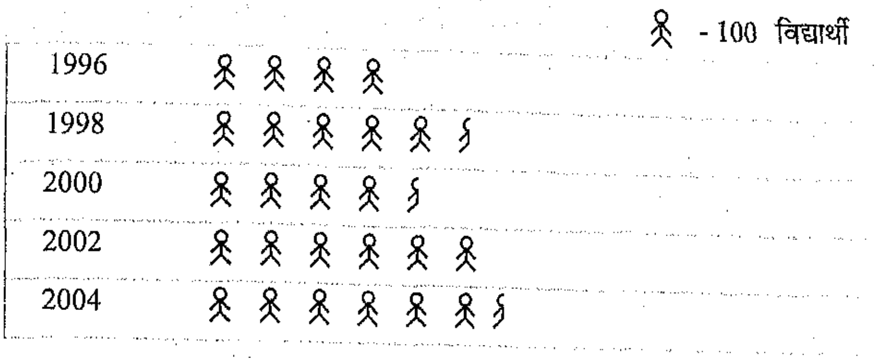
1.

⊗ - 10 पशु

गाँव A	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗
गाँव B	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗
गाँव C	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗
गाँव D	⊗ ⊗ ⊗ ⊗
गाँव E	⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗ ⊗

(a) 6 (b) गाँव B (c) गाँव C

2.



A (a) 6 (b) 5 पूरे और 1 अधूरा

B दूसरा

प्रश्नावली 9.3

1. (a) 2002 (b) 1998

2. (a) यह दंड आलेख सोमवार से शनिवार तक बेची गई कमीज़ों की संख्या दर्शाता है।

   (b) 1 इकाई = 5 कमीज़

   (c) शनिवार, 60

   (d) मंगलवार

   (e) 35

3. (a) यह दंड आलेख अजीज द्वारा विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों को प्रदर्शित करता है।

   (b) हिंदी (c) सामाजिक विज्ञान

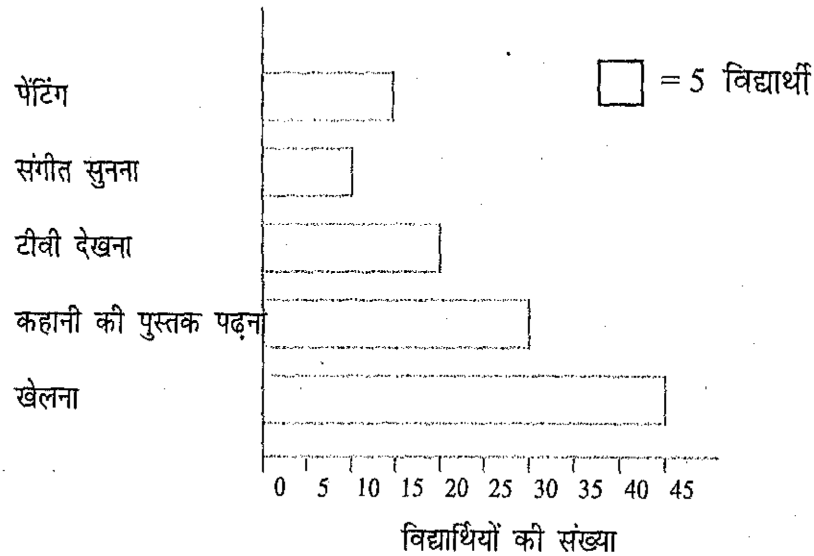
   (d) हिंदी-80, अंग्रेजी-60, गणित-70, विज्ञान-50 और सामाजिक विज्ञान-40.

4. (a) हिंदी-800, पंजाबी-400, उर्दू-200, मराठी-300, तमिल-100

   (b) तमिल (c) 300 (d) 100, 200, 300, 400, 500, 800

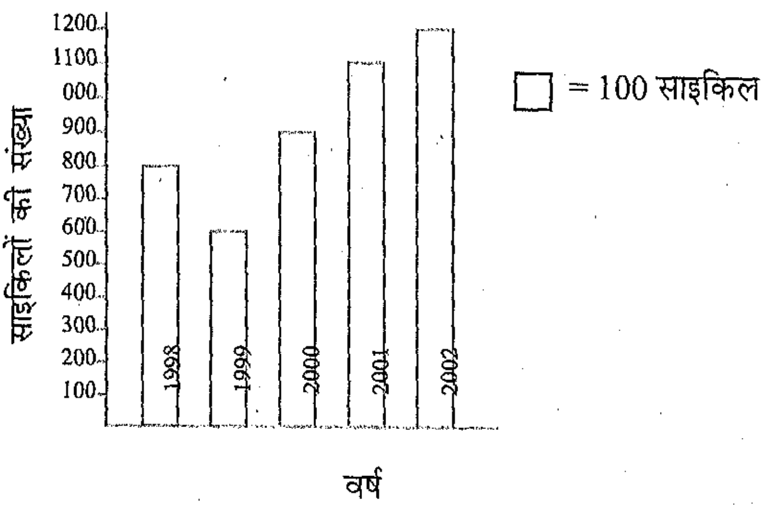
प्रश्नावली 9.4

1.



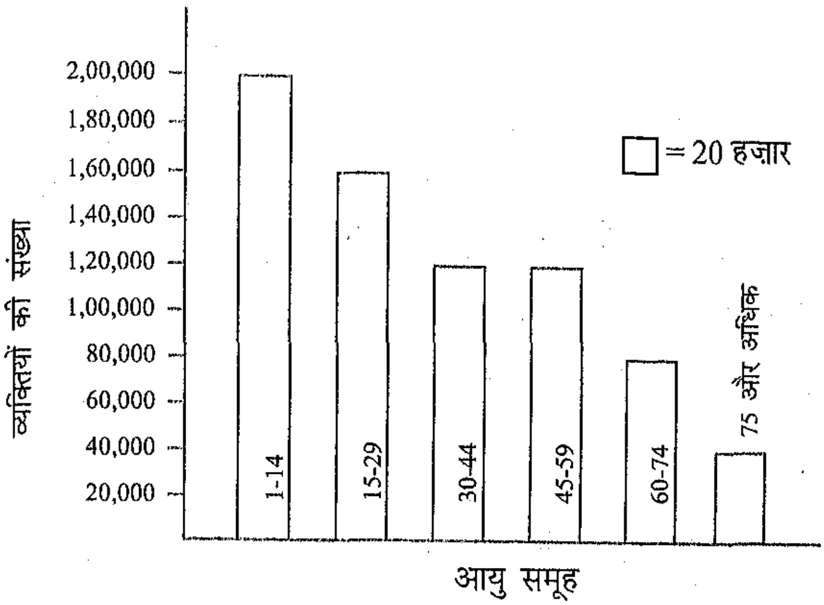
कहानी की पुस्तक पढ़ना

2.



(a) 2002 (b) 1999

3.



(a) 30-44, 45-59

(b) 1 लाख 20 हज़ार

प्रश्नावली 10.1

1. (a) 12 सेमी (b) 133 सेमी (c) 60 सेमी (d) 15 सेमी
(e) 15 सेमी (f) 52 सेमी

2. 100 सेमी अथवा 1 मी **3.** 7.5 मी **4.** 106 सेमी

5. 9.6 किमी **6.** (a) 12 सेमी (b) 27 सेमी (c) 22 सेमी

7. 39 सेमी **8.** 48 मी **9.** 5 मी **10.** 20 सेमी

11. (a) 7.5 सेमी (b) 10 सेमी (c) 5 सेमी **12.** 10 सेमी

13. 20,000 रु **14.** 7200 रु **15.** बुलबुल

16. (a) 100 सेमी (b) 100 सेमी (c) 100 सेमी (d) 100 सेमी
सभी आकृतियों का परिमाप समान है।

17. (a) 6 मी (b) 10 मी (c) क्रास का परिमाप अधिक है।

प्रश्नावली 10.2

1. (a) 9 वर्ग इकाई (b) 5 वर्ग इकाई (c) 4 वर्ग इकाई (d) 8 वर्ग इकाई
   (e) 10 वर्ग इकाई (f) 4 वर्ग इकाई (g) 6 वर्ग इकाई (h) 5 वर्ग इकाई
   (i) 9 वर्ग इकाई (j) 4 वर्ग इकाई (k) 5 वर्ग इकाई (l) 8 वर्ग इकाई
   (m) 14 वर्ग इकाई (n) 18 वर्ग इकाई

प्रश्नावली 10.3

1. (a) 12 वर्ग सेमी (b) 252 वर्ग सेमी (c) 6 वर्ग किमी (d) 7.29 वर्ग मी
2. (a) 100 वर्ग सेमी (b) 196 वर्ग सेमी (c) 25 वर्ग मी
3. (c) सबसे अधिक क्षेत्रफल (b) सबसे कम क्षेत्रफल
4. 6 मी 5. 8000 रु 6. 3.375 वर्ग मी
7. 15.33 वर्ग मी 8. 11 वर्ग मी 9. 12.96 वर्ग मी
10. (a) 28 वर्ग सेमी (b) 9 वर्ग सेमी
11. (a) 40 वर्ग सेमी (b) 245 वर्ग सेमी (c) 9 वर्ग सेमी
12. (a) 240 (b) 42

प्रश्नावली 11.1

1. (a) $2n$ (b) $3n$ (c) $3n$ (d) $2n$
   (e) $5n$ (f) $5n$ (g) $6n$
2. (a) और (d); प्रत्येक में तीलियों की संख्या 2 है।
3. $5n$ 4. $50h$ 5. $5s$

6. t किमी **7.** $8r, 64, 80$ **8.** $(x-4)$ वर्ष **9.** $l+5$

10. $2x+10$

11. (a) $3x+1$, $x=$ वर्गों की संख्या (b) $2x+1$, $x=$ त्रिभुजों की संख्या

प्रश्नावली 11.2

1. $3l$ **2.** $6l$ **3.** $12l$ **4.** $d=2r$

5. $(a+b)+c=a+(b+c)$

प्रश्नावली 11.3

2. (c), (d)

3. (a) योग, अवकलन, योग, अवकलन

(b) गुणन, विभाजन, गुणन

(c) गुणन और योग, विभाजन और अवकलन

(d) गुणन, गुणन और योग, गुणन एवं अवकलन

4. (a) $p+7$ (b) $p-7$ (c) $7p$ (d) $\frac{p}{7}$

(e) $-m-7$ (f) $-5p$ (g) $\frac{-p}{5}$ (h) $-5p$

5. (a) $2m+11$ (b) $2m-11$ (c) $5y+3$ (d) $5y-3$

(e) $-8y$ (f) $-8y+5$ (g) $16-5y$ (h) $-5y+16$

6. (a) $t+4, t-4, 4t, \frac{t}{4}, \frac{4}{t}, 4-t, 4+t$

(b) $2y+7, 2y-7, 7y+2$, ..., ...,

प्रश्नावली 11.4

1. (a) (i) $y+5$, (ii) $y-3$ (iii) $6y$ (iv) $6y-2$ (v) $3y+5$

(b) $(3b - 4)$ मीटर

(c) लंबाई $= 5h$ सेमी
चौड़ाई $= 5h - 10$ सेमी

(d) $s + 8, s - 7, 4s - 10$

(e) $(5v + 20)$ किमी

2. (a) एक पुस्तक की कीमत एक अभ्यास पुस्तिका की कीमत से तीन गुना है।

(b) टोनी के बक्स में टेबल पर रखे कंचों के 8 गुने कंचे हैं।

(c) स्कूल के विद्यार्थियों की कुल संख्या हमारी कक्षा के विद्यार्थियों की 20 गुनी है।

(d) जग्गू के चाचा की आयु जग्गू की आयु की 4 गुनी है और जग्गू की चाची की आयु उसके चाचा से से 3 वर्ष कम है।

(e) बिंदुओं की संख्या पंक्तियों की संख्या की 5 गुनी है।

प्रश्नावली 11.5

1. (a) चर x में समीकरण

(e) चर x में समीकरण

(f) चर x में समीकरण

(h) चर n में समीकरण

(j) चर p में समीकरण

(k) चर y में समीकरण

(o) चर x में समीकरण

2.

(a) नहीं	(b) हाँ	(c) नहीं	(d) नहीं
(e) नहीं	(f) हाँ	(g) नहीं	(h) नहीं
(i) हाँ	(j) हाँ	(k) नहीं	(l) नहीं
(m) नहीं	(n) नहीं	(o) नहीं	(p) नहीं
(q) हाँ			

3.	(a) 12	(b) 8	(c) 10	(d) 14
	(e) 4	(f) −2		
4.	(a) 6	(b) 7	(c) 12	(d) 10
5.	(a) 7	(b) 12	(c) 30	(d) 10
	(e) 25	(f) 50	(g) 9	(h) 160
	(i) 11	(j) 3	(k) 64	(l) 5
6.	(a) 22	(b) 17	(c) 16	(d) 11

प्रश्नावली 12.1

1.	(a) 4 : 3	(b) 4 : 7		
2.	(a) 1 : 2	(b) 2 : 5		
3.	(a) 3 : 2	(b) 2 : 7	(c) 2 : 7	
4.	3 : 4	**5.** 5, 12, 25, हाँ		
6.	(a) 3 : 4	(b) 14 : 9	(c) 3 : 11	(d) 2 : 3
7.	(a) 1 : 3	(b) 4 : 15	(c) 11 : 20	(d) 1 : 4
8.	(a) 3 : 1	(b) 1 : 2		
9.	17 : 550			
10.	(a) 115 : 216	(b) 101 : 115	(c) 101 : 216	
11.	(a) 3 : 1	(b) 16 : 15	(c) 5 : 12	
12.	15 : 7	13. 20 ; 100	14. 12 और 8	15. 20 और 16
16.	(a) 3 : 1	(b) 10 : 3	(c) 13 : 6	(d) 15 : 1

प्रश्नावली 12.2

1.	(a) हाँ	(b) नहीं	(c) नहीं	(d) नहीं
	(e) हाँ	(f) हाँ		
2.	(a) सत्य	(b) सत्य	(c) असत्य	(d) सत्य

(e) असत्य (f) सत्य

3. (a) सत्य (b) सत्य (c) सत्य (d) सत्य

(e) असत्य

4. (a) हाँ, मध्य पद - 1 मी, 40 रु ; चरम पद - 25 सेमी, 160 रु

(b) हाँ, मध्य पद - 65 ली, 6 बोतल ; चरम पद - 39 लीटर, 10 बोतल

(c) नहीं

(d) हाँ, मध्य पद - 2.5 लीटर, 4 रु ; चरम पद - 200 मिली, 50 रु

प्रश्नावली 12.3

1. 210 रु 2. 4500 रु 3. 644 मिमी

4. (a) 48.80 रु (b) 10 किग्रा

5. 5 डिग्री 6. 30, 000 रु 7. 10 केला 8. 5 किग्रा

9. 300 लीटर 10. मनीष 11. अनूप

प्रश्नावली 13.1

1. चार उदाहरण हैं : ब्लैकबोर्ड, टेबल की सतह, कैंची, कंप्यूटर डिस्क

2. रेखा l_2

3. (c) के अतिरिक्त, सभी सममित हैं

प्रश्नावली 13.2

1. (a) 4 (b) 4 (c) 4 (d) 1

(e) 6 (f) 4 (g) 0 (h) 0 (i) 3

3. सममिति की रेखाओं की संख्या हैं :

समबाहु त्रिभुज -3; वर्ग-4; आयत-2; समद्विबाहु त्रिभुज-1;

समचतुर्भुज 2; वृत्त-अनगिनत

4. (a) हाँ; एक समद्विबाहु त्रिभुज (b) नहीं

(c) हाँ; समबाहु त्रिभुज (d) हाँ; एक विषमबाहु त्रिभुज

7. (a) A,H,I,M,O,T,U,V,W,X,Y (b) B, C, D, E, H, I, K, O, X

(c) F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z

प्रश्नावली 13.3

1. सममिति की रेखाओं की संख्या :

(a) 4 (b) 1 (c) 2 (d) 2 (e) 1

(f) 2

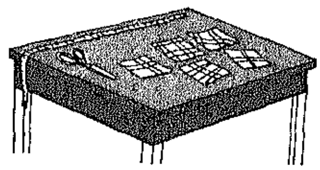
दिमागी-कसरत



1. आमों की एक टोकरी से आमों को दो-दो के समूह में गिनने पर एक बचता है, तीन-तीन के समूहो में गिनने पर दो बचते हैं, चार-चार के समूह में गिनने पर तीन बचते हैं, पाँच-पाँच के समूह में गिनने पर चार बचते हैं, छः-छः के समूह में गिनने पर पाँच बचते हैं, लेकिन सात के समूह बनाकर गिनने पर कुछ शेष नहीं बचता। टोकरी में कम से कम कितने आम थे?

2. एक लड़के से 3, 5, 12 तथा एक और संख्या का ल.स. निकालने के लिए कहा गया। लेकिन परिकलन करते समय उसने 12 के स्थान पर 21 लिखा और फिर भी उसका उत्तर सही निकलता है। चौथी संख्या क्या हो सकती है?

3. कपड़े के पाँच टुकड़ों की लंबाई 15 मी, 21 मी, 36 मी, 42 मी, 48 मी है। एक मापने की छड़ी से ये सभी पूर्ण इकाई रूप में मापी जा सकती हैं। छड़ी की अधिकतम लंबाई क्या हो सकती है?



4. तीन पात्र हैं। उनमें से एक में पूरा 10 लीटर दूध ही आता है तथा वह पूरा भरा हुआ है। बाकी दोनों पात्रों में क्रमशः 7 लीटर और 3 लीटर दूध आता है। पात्रों में कोई मापन चिह्न नहीं है। एक ग्राहक ने 5 लीटर दूध मांगा। आप उसे उतना दूध कैसे देंगे? उसे आँखों द्वारा अनुमान का विश्वास नहीं होगा।

5. 27 में कौन सी दो अंकों वाली संख्याएँ जोड़ी जाएँ कि उसके संख्यांक बदल जाएँ?

6. सीमेंट का गारा बनाया जा रहा था जिसमें आयतन के हिसाब से सीमेंट और रेत का मिश्रण अनुपात 1:6 है। आयतन की 42 इकाई के गारे में कितना सीमेंट और मिलाया जाए कि नया अनुपात 2:9 हो जाए।

7. साधारण नमक के पानी के साथ मिश्रण में नमक और पानी का भार के अनुसार अनुपात 30:70 है। इस तरह के 1 किग्रा मिश्रण में से यदि 100 ग्राम पानी भाप बनकर उड़ जाए, तो भार के अनुसार नमक और पानी का अनुपात क्या हो जाएगा?

8. मधुमक्खियों के एक झुंड का आधा भाग सरसों के खेत में शहद इकट्ठा करने गया। शेष का तीन चौथाई गुलाब के बाग में चला गया। शेष बची हुईं 10 अभी तक निर्णय नहीं ले पाईं। झुंड में कुल कितनी मधुमक्खियाँ थीं?



9. 15 बच्चे एक वृत्ताकार घेरे में बैठे हैं। उन्हें कहा गया है कि वे अपने एकदम अगले से अगले को रूमाल दें। यह खेल तब रुक जाएगा जब रूमाल वापस उसी बच्चे के पास आएगा जिसने खेल प्रारंभ किया था। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है: 1→3 →5 →7→9→11→13→15→ 2→4→6→8→10→ 12 →14→1, यहाँ हम देख सकते हैं कि रूमाल सभी बच्चों के हाथों में आया।

(i) क्या होगा, यदि रूमाल बाएँ से बीच में हर बार दो बच्चे छोड़कर देना शुरू करें? क्या तब प्रत्येक बच्चे को रूमाल मिलेगा?

(ii) क्या होगा, यदि बीच में तीन बच्चे छोड़े जाएं? आप क्या देखते हैं? किन स्थितियों में सभी को रूमाल मिलता है और किन स्थितियों में नहीं?

इस खेल को 16, 17, 18, 19, 20 बच्चों के साथ खेलकर देखिए। आप क्या देखते हैं?

10. दो संख्याएँ 9 और 16 लें। 9 को 16 से भाग देकर शेषफल प्राप्त करें। शेषफल क्या होगा, जब 2×9 को 16 से भाग करें, 3×9 को 16 से भाग करें, 4×9

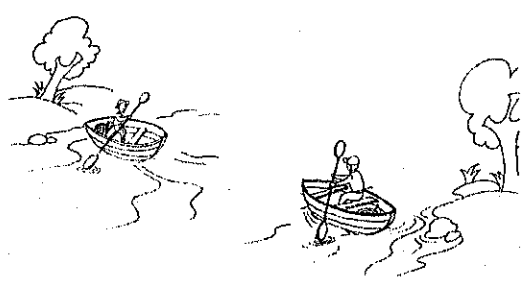
को 16 से भाग करें, 5×9 को 16 से भाग करें... 15×9 को 16 से भाग करें। शेषफलों की सूची बनाइए। अब संख्या 12 और 14 लीजिए। शेषफलों की सूची बनाइए, जब 12, 12×2, 12×3, 12×4, 12×5, 12×6, 12×7, 12×8, 12×9, 12×10, 12×11, 12×12, 12×13 को 14 से भाग करें। क्या उपरोक्त दोनों स्थितियों में कुछ अंतर दिखाई देता है?

11. आपको दो पात्र दिए जाते हैं जिनकी धारिता क्रमशः 9 लीटर और 5 लीटर है। पात्रों पर न तो कोई मापन चिह्न है और न ही दृश्य अनुमान संभव है। नल से 3 लीटर पानी कैसे इकट्ठा करेंगे (आप पात्र का प्रयोग पानी डालने के लिए कर सकते हैं)। यदि पात्रों की धारिता क्रमशः 8 लीटर और 6 लीटर हो तो क्या आप 5 लीटर पानी इकट्ठा कर सकते हैं?

12. एक सभागृह की पूर्वी दीवार का क्षेत्रफल 108 वर्ग मीटर है, उत्तरी दीवार का क्षेत्रफल 135 वर्ग मीटर है और फर्श का क्षेत्रफल 180 वर्ग मीटर है। सभागृह की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

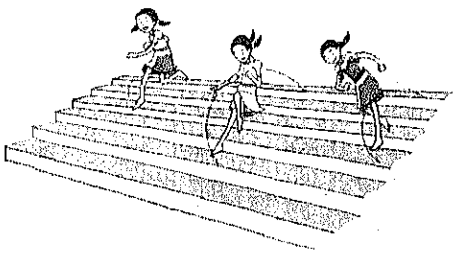
13. यदि दो अंकों की एक संख्या के इकाई अंक में से 4 घटाया जाए और दहाई अंक में 4 जोड़ा जाए तो इस प्रकार प्राप्त संख्या दोगुनी हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।

14. दो नाविक एक नदी के दो सम्मुख किनारों से एक साथ विपरीत दिशा में चलने के 45 मिनट बाद एक दूसरे को पार (cross) करते हैं। वे जब तक नाव चलाते हैं जब तक कि दूसरे किनारे पर पहुँच कर वापस उसी प्रारंभिक किनारे पर न आ जाएँ। वे दोबारा एक दूसरे को कब पार करेंगे?



15. तीन लड़कियाँ सीढ़ियाँ उतर रही हैं। एक लड़की दो सीढ़ी एक कदम में उतरती है। दूसरी तीन सीढ़ी और तीसरी चार सीढ़ी एक कदम में उतरती है।

वे तीनों सीढ़ियों के शुरू होने के पहले स्थान पर अपने पैरों के निशान छोड़ते हुए चलती हैं। वे सभी वे सभी अंतिम सीढ़ी पर एक साथ पहुँचती हैं। कितनी सीढ़ियों पर केवल एक जोड़ा पैरों के निशान होंगे?



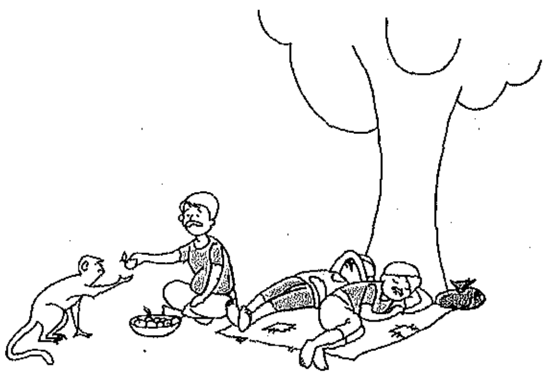
क्या कोई ऐसी भी सीढ़ी है जिस पर पैरों के निशान नहीं होंगे?

16. सैनिकों के एक समूह को तीन-तीन पंक्तियाँ बनाकर एक कतार में खड़े होने को कहा गया। यह देखा गया कि एक सैनिक बच जाता है। जब उन्हें पाँच-पाँच की पंक्ति में खड़े होने को कहा गया तब दो सैनिक बच जाते हैं। जब उन्हें सात-सात की पंक्ति में खड़े होने को कहा गया तब तीन सैनिक बच जाते हैं। समूह में कुल कितने सैनिक थे?
17. चार बार 9 का प्रयोग कर विभिन्न संक्रियाएँ +, –, ×, इत्यादि लगाकर 100 प्राप्त कीजिए।
18. $2 \times 2 \times 2 \ldots\ldots \times 2$ (30 बार) के गुणनफल में कितने अंक होंगे?
19. यदि एक व्यक्ति 30 किमी प्रति घंटे की चाल से चलता है तो अपने गंतव्य स्थान पर 5 मिनट देरी से पहुँचता है। यदि वह 40 किमी प्रति घंटे की चाल से चले तो 10 मिनट जल्दी पहुँच जाता है। प्रारंभिक स्थान से गंतव्य स्थान की दूरी ज्ञात कीजिए?
20. दो वाहनों की चालों का अनुपात 2:3 है। यदि पहला वाहन 50 किमी दूरी 3 घंटे में तय करता है तो दूसरा वाहन 2 घंटे में कितनी दूरी तय करेगा?
21. श्री नटराजन् की आय का व्यय के साथ अनुपात 7:5 का है। यदि वह एक महीने में 2000 रु बचाता है तो उसकी आय कितनी होगी?

22. एक लॉन की लंबाई का चौड़ाई से अनुपात 3:5 है। इसमें बाड़ लगाने का खर्चा 3200 रु आया जो कि 2 रु प्रति मीटर की दर से है। लॉन को 10 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से विकसित करने पर कितना ख़र्च आएगा?

23. यदि अंगूठे के लिए एक, तर्जनी (Index) उँगली के लिए दो, मध्यमा (Middle) के लिए तीन, अनामिका (Ring) उँगली के लिए चार, कनिष्ठिका (Little) उँगली के लिए पाँच और इसी प्रकार पीछे से गणना करते हुए छः अनामिका उँगली के लिए , सात मध्यमा उँगली के लिए, आठ तर्जनी उँगली के लिए, नौ अंगूठे के लिए, दस तर्जनी उँगली के लिए, ग्यारह मध्यमा उँगली के लिए, बारह अनामिका उँगली के लिए, तेरह कनिष्ठिका उँगली के लिए, चौदह अनामिका उँगली और इसी तरह आगे भी गिनती करते जाएँ तो किस उँगली के लिए एक हज़ार गिनेगें।

24. आम के एक बाग से तीन मित्रों ने मिलकर कुछ आम तोड़े और इन्हें इकट्ठा कर सो गए। कुछ समय बाद उनमें से एक मित्र उठा और उसने इकट्ठे किए गए आमों को तीन बराबर भागों में बाँटा तो 1 आम बच गया। जिसे उसने बंदर को खिला दिया और एक भाग अपने पास रखकर फिर सो गया। थोड़ी देर बाद दूसरा मित्र उठा और



उसने भी शेष आमों को अनजाने में तीन बराबर भागों में बाँटा तो 1 आम बच गया जिसे उसने बंदर को खिला दिया और एक भाग अपने पास रखकर सो गया। थोड़ी देर बाद तीसरा मित्र उठा उसने भी शेष बचे आमों को अनजाने में तीन बराबर भागों में बाँटा तो 1 आम बच गया जिसे उसने बंदर को खिला दिया और अपना एक भाग अपने पास रखकर सो गया। कुछ देर बाद तीनों मित्र एक साथ उठे तो 30 आम मिले। बताइए प्रारंभ में कुल कितने आम तोड़े गए थे?

25. **विशिष्ट संख्या**

एक संख्या है जो बहुत विशिष्ट है। यह संख्या अपने अंकों के योगफल की तिगुनी है। क्या आप यह संख्या ज्ञात कर सकते हैं?

26. 10 पौधों को सीधी रेखाओं में ऐसे लगाना है कि प्रत्येक रेखा में ठीक-ठीक 4 पौधे आ जाएँ।



27. निम्नलिखित प्रत्येक क्रम में अगली संख्या लिखिए :

(a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, ...

(b) 2, 7, 12, 17, 22, ...

(c) 2, 6, 12, 20, 30, ...

(d) 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

(e) 1, 3, 6, 10, 15, ...

28. नीचे दी गए कथन के क्रम को देखिए।

$31 \times 39 = 13 \times 93$

प्रत्येक पक्ष में दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य हैं और संगत संख्याओं के क्रम को संख्यांकों को बदलकर प्राप्त किया जा सकता है। ऐसे ही कुछ और संख्या युग्मों को लिखने का प्रयास कीजिए।

उत्तरमाला

1. 119
2. 28
3. 3 मी
4. व्यक्ति उनसे अलग एक खाली बर्तन लेता है।

3 लीटर वाले पात्र की सहायता से 9 लीटर दूध 10 लीटर वाले पात्र से खाली पात्र में डाल लेगा, इस प्रकार 1 लीटर दूध 10 लीटर वाले पात्र में बच जाएगा। 7 लीटर वाले पात्र की मदद से 7 लीटर दूध अलग वाले पात्र से निकालेगा और

उसे 10 लीटर वाले पात्र में डाल देगा। अब 10 लीटर वाले पात्र में $1+7=8$ लीटर दूध होगा।

3 लीटर वाले पात्र की सहायता से वह तीन लीटर दूध 10 लीटर वाले पात्र में से निकालेगा। इस प्रकार उसमें $8-3=5$ लीटर दूध बच जाएगा जो कि वह ग्राहक को देगा।

5. 14, 25, 36, 47, 58, 69
6. 2 इकाई
7. 1 : 2
8. 80
9. (i) नहीं, सभी बच्चों को यह प्राप्त नहीं होगा।

   (ii) सभी प्राप्त करेंगे।
10. 9, 2, 11, 4, 13, 6, 15, 8, 1, 10, 3, 12, 5, 14, 7

    12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, 12, 10, 8, 6, 4
11. 9 लीटर के पात्र को भरिए। 5 लीटर वाले पात्र की सहायता से उसमें से 5 लीटर निकाल लें। अब 5 लीटर वाले पात्र को खाली कर दें। बचा हुआ 4 लीटर इस 9 लीटर वाले पात्र में से 5 लीटर वाले पात्र में डाल दें।

    अब 9 लीटर वाले पात्र को पुनः भरें। 5 लीटर वाले पात्र को भर लें। 9 लीटर वाले पात्र में 8 लीटर रह जाता है। पाँच लीटर वाले पात्र को खाली कर लें। 9 लीटर वाले पात्र से इसे भर लें। 9 लीटर वाले पात्र में 3 लीटर बच जाएगा।
12. लंबाई = 9 मी
13. 36
14. 90 मिनट
15. वे सीढ़ियाँ जिनमें पैरों के एक जोड़े के निशान हैं - 2, 3, 9, 10

    वे सीढ़ियाँ जिन पर कोई निशान नहीं हैं - 1, 5, 7, 11
16. 52

17. $99 + \frac{9}{9}$

18. 10

19. 30 किमी

20. 50 किमी

21. 7000 रु प्रति माह

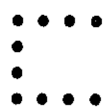
22. 15,00,000 रु

23. तर्जनी उँगली

24. 106 आम

25. 27

26. एक व्यवस्था की जा सकती है



27. (a) 25 (b) 27 (c) 42 (d) 21 (e) 21

28. एक ऐसा युग्म है $13 \times 62 = 31 \times 26$